

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2020
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 2/11/2020

Ημερομηνία Παράδοσης: 12/11/2020

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Θέματα: ΣΜΠ, Μέση Τιμή & Διασπορά, Από Κοινού ΣΜΠ Πολλαπλών ΤΜ, Δέσμευση-Ανεξαρτησία.

Άσκηση 1. Έστω ότι X είναι μία Διωνυμική Τ.Μ. με παραμέτρους n και p . Να αποδείξετε ότι η Συνάρτηση Πιθανότητας Μάζας (ΣΠΜ) της μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον επαγωγικό τύπο:

$$\begin{cases} p_X(k+1) = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-k}{k+1} \cdot p_X(k) & k = 0, 1, \dots, n-1 \\ p_X(0) = (1-p)^n \end{cases}$$

Άσκηση 2.

- Θεωρείστε μία Διωνυμική Τυχαία Μεταβλητή X , με παραμέτρους n και p . Έστω k^* ο μέγιστος ακέραιος ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος του $(n+1)p$. Να αποδείξετε ότι η PMF, $p_X(k)$, είναι μονοτονικά μη-φθίνουσα ως προς k στο διάστημα $[0, k^*)$, και είναι μονοτονικά φθίνουσα ως προς k για $k \geq k^*$.
- Έστω ότι X είναι μία Τυχαία Μεταβλητή Poisson, με παράμετρο λ . Να αποδείξετε ότι η PMF, $p_X(k)$, αυξάνει μονοτονικά ως προς k μέχρι το σημείο όπου το k ισούται με τον μέγιστο ακέραιο που δεν ξεπερνά την λ , και μετά το σημείο αυτό είναι μονοτονικά φθίνουσα ως προς k .

Άσκηση 3. Έστω a και b θετικοί ακέραιοι με $a \leq b$, και έστω X μία Τ.Μ. η οποία παίρνει ως τιμές τις δυνάμεις του 2 στο διάστημα $[2^a, 2^b]$ με ίση πιθανότητα. Να υπολογιστούν:

- Η Μέση Τιμή της Τ.Μ. X , $E[X]$.
- Η Διασπορά της Τ.Μ. X , $VAR[X]$.

Άσκηση 4. Ρίχνετε ανεξάρτητα ένα αμερόληπτο νόμισμα, και μετράτε τον αριθμό των ρίψεων μέχρι να εμφανιστούν 'Γράμματα'. Εάν ο αριθμός αυτός είναι n , λαμβάνετε 2^n ευρώ.

- (i) Ποια είναι η Μέση Τιμή του ποσού που θα λάβετε;
- (ii) Πόσο θα πληρώνετε για να παίζετε το παιχνίδι αυτό;

Άσκηση 5. Ο Σάκης και ο Λάκης παίζουν το εξής παιχνίδι: Ο Λάκης θα ρίξει διαδοχικά 4 φορές ένα κέρμα με $P(k) = 0.4$. Πριν τις ρίψεις θα πρέπει να αποφασίσει μεταξύ 2 στρατηγικών:

- (α) Να κερδίσει σε ευρώ ποσό X , ίσο με το πλήθος των 'Κ' (Κορώνα) που θα φέρει
- (β) Να κερδίσει σε ευρώ ποσό Y , ίσο με το τετράγωνο του πλήθους των 'Κ' που θα φέρει μειωμένο 1.5 φορές κατά τα ίδιο πλήθος.

- (i) Ποια είναι η πιο συμφέρουσα στρατηγική για το Λάκη; Δηλαδή, ποια στρατηγική μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος του;
- (ii) Στη γενική περίπτωση, όπου η πιθανότητα να έρθει «κορώνα» είναι p , για ποιο εύρος τιμών του p είναι πιο συμφέρουσα η στρατηγική α) από την στρατηγική β);

Άσκηση 6. Θεωρήστε 4 ανεξάρτητες ρίψεις ενός 6-εδρου ζαριού. Έστω X ο αριθμός των 1 και Y ο αριθμός των 2 που προκύπτουν. Να υπολογιστεί η από κοινού ΣΜΠ των Τ.Μ. X και Y .