

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

- (α) Ο πρώτος φοιτητής μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε από τις n ομάδες. Ο δεύτερος μπορεί επίσης να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε από τις n ομάδες, και ο k -στος φοιτητής σε οποιαδήποτε από n ομάδες. Άρα υπάρχουν n^k τρόποι για να τοποθετήσουμε n φοιτητές σε k ομάδες.
- (β) Τα τρία διαγωνίσματα μπορούν να προγραμματιστούν σε μια περίοδο 5 ημερών με $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ τρόπους.
Αν δεν γίνεται να προγραμματιστούν δυο διαγωνίσματα για την ίδια μέρα, τότε υπάρχουν $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ τρόποι να προγραμματιστούν τρία διαγωνίσματα σε μια περίοδο 5 ημερών.
- (γ) Για τη πρώτη θέση υπάρχουν 24 επιλογές γραμμάτων. Αφού επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο γράμμα και για τη δεύτερη θέση υπάρχουν 24 επιλογές γραμμάτων. Το ίδιο ισχύει και για τη τρίτη και τέταρτη θέση. Άρα ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών συμβολοσειρών με τέσσερα γράμματα είναι $24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^4 = 331776$.
Αν θέλουμε τα γράμματα της συμβολοσειράς να είναι διαφορετικά μεταξύ τους, για τη πρώτη θέση υπάρχουν 24 επιλογές γραμμάτων, για τη δεύτερη θέση υπάρχουν 23 επιλογές γραμμάτων (από τα υπόλοιπα 23 γράμματα), για τη τρίτη θέση υπάρχουν 22 επιλογές γραμμάτων (από τα υπόλοιπα 22 γράμματα), και για τη τέταρτη θέση υπάρχουν 21 επιλογές (από τα υπόλοιπα 21 γράμματα). Άρα ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών συμβολοσειρών τεσσάρων διαφορετικών γραμμάτων είναι $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 255024$.
- (δ) Υπάρχουν 6 επιλογές για το πρώτο ψηφίο του τετραψήφιου αριθμού, 5 για το δεύτερο, 4 για το τρίτο και 3 για το τέταρτο. Άρα συνολικά υπάρχουν $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ τετραψήφιοι αριθμοί που μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία αυτά.

Άσκηση 2.

- (α) Το πρώτο άτομο έχει 6 επιλογές για τη θέση που θα καθίσει. Εφόσον μια θέση θα έχει πιαστεί, το δεύτερο άτομο θα έχει 5 επιλογές για τη θέση. Ομοίως, το τρίτο άτομο έχει 4 επιλογές, το τέταρτο 3, το πέμπτο 2 και το έκτο 1. Άρα πολλαπλασιάζοντάς τις προκύπτει ότι υπάρχουν $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ δυνατότητες να καθίσουν 3 αγόρια και 3 κορίτσια σε 6 καθίσματα.
- (β) Αν με K συμβολίζουμε το κορίτσι και A το αγόρι, τότε για να καθίσουν μαζί τα αγόρια και μαζί τα κορίτσια, θα πρέπει να κάτσουν ως εξής: $KKKAAA$ ή $AAAKKK$. Για την κάθε μια από αυτές τις 2 επιλογές, το πρώτο κορίτσι έχει 3 επιλογές για την θέση που θα καθίσει, το δεύτερο 2 και το τρίτο 1. Δηλαδή $3!$. Το ίδιο ισχύει και για τα αγόρια. Άρα συνολικά υπάρχουν $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$ δυνατότητες.
- (γ) Αν όλα τα κορίτσια καθίσουν μαζί αλλά όχι αναγκαστικά και τα αγόρια, τότε μπορούν να κάτσουν ως εξής: $KKKAAA$ ή $AKKKAA$ ή $AAKKKA$ ή $AAAKKK$. Πάλι όπως στο προηγούμενο ερώτημα, σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις υπάρχουν $3!$ επιλογές για τα κορίτσια και $3!$ επιλογές για τα αγόρια. Άρα έχουμε συνολικά $4 \cdot 3! \cdot 3! = 144$ δυνατότητες.

- (δ) Για να μην κάτσουν δυο άτομα του ίδιου φύλλου σε συνεχόμενα καθίσματα θα πρέπει να κάτσουν είτε ΑΚΑΚΑΚ είτε ΚΑΚΑΚΑ. Παρόμοια με τα παραπάνω ερωτήματα υπάρχουν συνολικά $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$ δυνατότητες.
- (ε) Αν συμβολίσουμε με Μ τη Μαρία, Ε την Ελένη και Τ ένα άλλο άτομο, τότε για να υπάρχουν 2 άτομα ανάμεσα στη Μαρία και την Ελένη θα πρέπει να καθίσουν ως εξής: ΕΤΤΜΤΤ ή ΤΕΤΤΜΤ ή ΤΤΕΤΤΜ, καθώς και οι αντίστοιχες επιλογές με την Ελένη και τη Μαρία ανάποδα. Επομένως, για κάθε μια από τις 3 παραπάνω επιλογές, υπάρχουν 2 δυνατότητες για να επιλέξουν θέση η Μαρία και η Ελένη, και $4!$ για τους υπόλοιπους. Άρα συνολικά υπάρχουν $3 \cdot 2 \cdot 4! = 144$ δυνατότητες.

Άσκηση 3.

- (α) Αυτό είναι ένα πρόβλημα επιλογής 10 από 100 αντικείμενα. Συνεπώς η λύση είναι

$$\binom{100}{10} = \frac{100!}{(10!90!)} = 17.310.309.456.440$$

- (β) Πρέπει να επιλέξουμε 5 αγόρια από τα 40 και 5 κορίτσια από τα 60. Υπάρχουν $\binom{40}{5}$ τρόποι να επιλέξουμε τα αγόρια και $\binom{60}{5}$ τρόποι να επιλέξουμε τα κορίτσια. Εφόσον θα πραγματοποιήσουμε και τα δύο πειράματα, εφαρμόζουμε τον κανόνα του γινομένου. Άρα ο συνολικός αριθμός των τρόπων για να σχηματίσουμε την επιτροπή είναι:

$$\binom{40}{5} \cdot \binom{60}{5} = \frac{40!}{5!35!} \cdot \frac{60!}{5!55!} = 658.008 \cdot 5.461.512 = 3.593.718.588.096$$

- (γ) Ας ονομάσουμε ως πρώτο πείραμα το σχηματισμό της επιτροπής από 6 αγόρια και 4 κορίτσια. Πρέπει να επιλέξουμε 6 αγόρια από τα 40 και 4 κορίτσια από τα 60. Άρα ο συνολικός αριθμός των τρόπων για να σχηματίσουμε την επιτροπή είναι:

$$\binom{40}{6} \cdot \binom{60}{4} = \frac{40!}{6!34!} \cdot \frac{60!}{4!56!} = 3.838.380 \cdot 487.635 = 1.871.728.431.300$$

Ας ονομάσουμε ως δεύτερο πείραμα το σχηματισμό της επιτροπής από 4 αγόρια και 6 κορίτσια. Πρέπει να επιλέξουμε 4 αγόρια από τα 40 και 6 κορίτσια από τα 60. Άρα ο συνολικός αριθμός των τρόπων για να σχηματίσουμε την επιτροπή είναι:

$$\binom{40}{4} \cdot \binom{60}{6} = \frac{40!}{4!36!} \cdot \frac{60!}{6!54!} = 91.390 \cdot 50.063.860 = 4.575.336.165.400$$

Είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να πραγματοποιήσουμε ταυτόχρονα και τα δύο πειράματα. Η επιτροπή μπορεί να σχηματιστεί ή μόνο με τον ένα, ή μόνο με τον άλλο τρόπο. Συνεπώς θα εφαρμόσουμε το κανόνα του αθροίσματος. Άρα ο συνολικός αριθμός των τρόπων είναι:

$$1.871.728.431.300 + 4.575.336.165.400 = 6.447.064.596.700$$

Άσκηση 4.

Υπάρχουν $\binom{19}{3}$ τρόποι να επιλέξουμε 3 σφαίρες από τις συνολικά 19 σφαίρες στην περίπτωση της δειγματοληψίας χωρίς επανάθεση, επομένως έχουμε:

(α) $P(\text{Όλες οι σφαίρες είναι του ίδιου χρώματος}) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{8}{3}}{\binom{19}{3}}$, αν κάθε σφαίρα που εξάγεται δεν μπαίνει ξανά στην κάλπη (δειγματοληψία χωρίς επανάθεση).

(β) $P(\text{Όλες οι σφαίρες είναι διαφορετικών χρωμάτων}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{8}{1}}{\binom{19}{3}}$, αν κάθε σφαίρα που εξάγεται δεν μπαίνει ξανά στην κάλπη (δειγματοληψία χωρίς επανάθεση).

Υπάρχουν 19^3 τρόποι να επιλέξουμε 3 σφαίρες από τις συνολικά 19 σφαίρες στην περίπτωση της δειγματοληψίας με επανάθεση, επομένως έχουμε:

(γ) $P(\text{Όλες οι σφαίρες είναι του ίδιου χρώματος}) = \frac{5^3 + 6^3 + 8^3}{19^3}$, αν κάθε σφαίρα που εξάγεται ξανα-μπαίνει στην κάλπη πριν επιλεγεί η επόμενη (δειγματοληψία με επανάθεση).

(δ) $P(\text{Όλες οι σφαίρες είναι διαφορετικών χρωμάτων}) = \frac{3! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8}{19^3}$, αν κάθε σφαίρα που εξάγεται ξαναμπαίνει στην κάλπη πριν επιλεγεί η επόμενη (δειγματοληψία με επανάθεση).

Άσκηση 5.

(α) Για την αλγεβρική απόδειξη εξετάζουμε το κάθε μέλος της σχέσης:

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{n!}{k!(n-m)!(m-k)!}$$

και

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-k-m+k)!} = \frac{n!}{k!(n-m)!(m-k)!}$$

Αφού το κάθε μέλος της ισότητας καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα, ισχύει η ισότητα.

(β) Ένα πρόβλημα συνδυαστικής με το οποίο μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη σχέση αυτή είναι το εξής:

Έστω ότι διαλέγουμε μια ομάδα m ατόμων με k υπεύθυνους από ένα πληθυσμό n ατόμων. Τότε μπορούμε είτε να διαλέξουμε πρώτα τα m άτομα της ομάδας από τα n άτομα του πληθυσμού και μετά τους k υπεύθυνους από τα m αυτά άτομα, δηλαδή $\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k}$, είτε μπορούμε να διαλέξουμε πρώτα τους k υπεύθυνους από τα n άτομα του πληθυσμού και μετά να διαλέξουμε τα υπόλοιπα $m-k$ άτομα της ομάδας από τα υπόλοιπα $n-k$ άτομα του πληθυσμού, δηλαδή $\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$.

Άσκηση 6.

(α) Θα πρέπει το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των ενδεχόμενων της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X να ισούται με 1, δηλαδή:

$$1 = \sum_{x=-2}^2 p_X(x) = \frac{1}{c}(2 + 1 + 0 + 1 + 2) = \frac{6}{c}$$

$$\Rightarrow c = 6$$

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_x x \cdot p_X(x) = \sum_{x=-2}^2 x \frac{|x|}{6} \\ &= \frac{1}{6}[-2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Γενικά, κάθε τυχαία μεταβλητή X με άρτια ΣΠΠ πρέπει να έχει $E[X] = 0$.

Σημείωση: μια συνάρτηση λέγεται άρτια αν $f(x) = f(-x)$, δηλαδή είναι συμμετρική γύρω από τον άξονα των y .

(γ) Για τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \sum_{x=\pm 2, \pm 1} (x - E[X])^2 p_X(x) = (-2)^2 p_X(-2) + (-1)^2 p_X(-1) + 1^2 p_X(1) + 2^2 p_X(2) \\ &= 4 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{2}{6} \\ &= \frac{8 + 1 + 1 + 8}{6} = 3. \end{aligned}$$

Άσκηση 7.

(α) Το καπέλο περιέχει τα ζεύγη $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ με ίδια πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

Επομένως,

$$P(\{\eta \text{ μπάλα } 3 \text{ βρίσκεται στο καπέλο}\}) = P(\{1, 3\} \cup \{2, 3\} \cup \{3, 4\}) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

(β)

Ενδεχόμενα του Ω	Πιθανότητα	X	$p_X(x)$
$\{1, 2\}$	$\frac{1}{6}$	3	$\frac{1}{6}$
$\{1, 3\}$	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{1}{6}$
$\{1, 4\}$	$\frac{1}{6}$	5	$\frac{2}{6}$
$\{2, 3\}$	$\frac{1}{6}$	5	
$\{2, 4\}$	$\frac{1}{6}$	6	$\frac{1}{6}$
$\{3, 4\}$	$\frac{1}{6}$	7	$\frac{1}{6}$

Συνεπώς,

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 3, 4, 6, 7 \\ \frac{2}{6} & x = 5 \end{cases}$$

$$E[X] = (3 + 4 + 6 + 7) \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{2}{6} = 5$$