

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό εξάμηνο 2020-2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Σετ Ασκήσεων 2: Δεσμευμένη Πιθανότητα, ΘΟΠ, Νόμος του Bayes,
Ανεξαρτησία.

Ημερομηνία Ανάθεσης: 6/10/2020

Ημερομηνία Παράδοσης: 19/10/2020

Άσκηση 1

Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές. Ένας φίλος μας λέει ότι το ενδεχόμενο να φέρουμε δύο φορές Κορόνα έχει ίση ή μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί αν γνωρίζουμε ότι η πρώτη ρίψη έφερε Κορόνα, απ' ό,τι αν γνωρίζουμε ότι τουλάχιστον μία από τις δύο ρίψεις έφερε Κορόνα. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του; Συμβαίνει το ίδιο αν είναι δίκαιο είτε άδικο το νόμισμα; Περιγράψτε μαθηματικά τι συμβαίνει όταν το νόμισμα έχει μια αφθαίρετη πιθανότητα $0 < p \leq 1$ να έρθει Κορόνα.

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο η πρώτη ρίψη να έρθει Κορόνα και B το ενδεχόμενο η δεύτερη ρίψη να έρθει Κορόνα. Τότε, ενδεχόμενο $A \cap B$ ισούται με τη ρίψη δύο Κορόνων, ενώ το ενδεχόμενο $A \cup B$ ισούται με τη ρίψη τουλάχιστον μίας Κορόνας. Θα πρέπει να συγκρίνουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες $P(A \cap B|A)$ και $P(A \cap B|A \cup B)$. Έχουμε

$$P(A \cap B|A) = \frac{P(A \cap B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

και

$$P(A \cap B|A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $P(A \cup B) \geq P(A)$, άρα το πρώτο κλάσμα είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο από το δεύτερο, ανεξάρτητα αν το νόμισμα είναι δίκαιο ή άδικο. Πιο συγκεκριμένα, αν η πιθανότητα να έχουμε Κορόνα σε κάποια ρίψη είναι $P(A) = P(B) = p$, τότε

$$P(A \cap B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{p \cdot p}{p} = p,$$

$$P(A \cap B|A \cup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = \frac{p \cdot p}{p + p - p \cdot p} = \frac{p}{2 - p}.$$

Άσκηση 2

Εργοστάσιο χρησιμοποιεί τρεις διαφορετικές μηχανές για την κατασκευή αντιστάσεων του $1k\Omega$. Το 80% των αντιστάσεων που κατασκευάζει η μηχανή M1 είναι εντός των αποδεκτών ορίων $[950, 1050]\Omega$. Το αντίστοιχο ποσοστό για τις μηχανές M2 και M3 είναι 90% και 60%. Οι μηχανές M1 και M3 παράγουν από 3000 αντιστάσεις την ώρα, ενώ η μηχανή M2 παράγει 4000 αντιστάσεις την ώρα. Οι αντιστάσεις που παράγονται σε μία ώρα από τις τρεις μηχανές συσκευάζονται όλες μαζί σε μια παρτίδα.

1. Να υπολογίσετε την πιθανότητα μία αντίσταση που επιλέγεται τυχαία από μία παρτίδα να είναι εντός των αποδεκτών ορίων. Σχεδιάστε και το αντίστοιχο δέντρο πιθανοτήτων.
2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα μία αντίσταση με τιμή εντός των αποδεκτών ορίων να έχει κατασκευασθεί από τη μηχανή M3.

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα $A = \{\text{αντίσταση εντός των αποδεκτών ορίων}\}$ και $B_i = \{\text{αντίσταση κατασκευάστηκε από τη μηχανή } M_i\}$, $i = 1, 2, 3$.

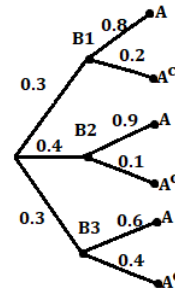
Από τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε ότι $P(A|B_1) = 0.8$, $P(A|B_2) = 0.9$, $P(A|B_3) = 0.6$. Επίσης, υπολογίζουμε

$$P(B_1) = P(B_3) = \frac{3000}{10000} = 0.3$$

$$P(B_2) = \frac{4000}{10000} = 0.4$$

1.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ &= 0.8 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.3 \\ &= 0.78 \end{aligned}$$



Άρα το 78% των αντιστάσεων μέσα σε ένα δέμα είναι εντός των αποδεκτών ορίων

2.

$$\begin{aligned} P(B_3|A) &= \frac{P(B_3 \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{\sum_{i=1}^3 P(A|B_i)P(B_i)} \\ &= \frac{0.6 \cdot 0.3}{0.78} \\ &= 0.23 \end{aligned}$$

Το 23% των αντιστάσεων με αποδεκτή τιμή, σε ένα δέμα, προέρχεται από τη μηχανή M3.

Με παρόμοιους υπολογισμούς, θα μπορούσαμε να βρούμε ότι $P(B_1|A) = 0.31$, $P(B_2|A) = 0.46$.

Άσκηση 3

Η Μαρία προσπαθεί να βρει στη συρταριέρα της ένα δοχείο με μπάλες, που χρειάζεται για να λύσει μια άσκηση στο μάθημα των Πιθανοτήτων. Ξέρει ότι το έχει αφήσει στο συρτάρι j με πιθανότητα $p_j > 0$. Όμως τα συρτάρια είναι τόσο ακατάστατα, που ακόμη και αν ανοίξει το σωστό συρτάρι i , η πιθανότητα να βρει το δοχείο μέσα σε αυτό είναι μόνο d_i . Η Μαρία ανοίγει ένα συρτάρι i , αλλά δεν βρίσκει μέσα το δοχείο. Με δεδομένο αυτό το γεγονός, δείξτε ότι η πιθανότητα το δοχείο να βρίσκεται στο συρτάρι j , είναι

$$\frac{p_j}{1 - p_i d_i}, \quad \text{αν } j \neq i, \\ \frac{p_i(1 - d_i)}{1 - p_i d_i}, \quad \text{αν } j = i.$$

Λύση

Έστω A το γεγονός η Μαρία να μη βρει το δοχείο στο συρτάρι i . Η πιθανότητα να το έβρισκε ήταν $P(A^c) = p_i d_i$, άρα $P(A) = 1 - p_i d_i$.

Τώρα, έστω B το ενδεχόμενο το δοχείο να βρίσκεται στο συρτάρι j . Αν $j \neq i$, τότε η Μαρία σίγουρα δεν βρήκε το δοχείο στο συρτάρι i . Δηλαδή, $P(A|B) = 1$ και

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{p_j}{1 - p_i d_i}.$$

Αν όμως ήταν $j = i$, τότε η πιθανότητα να μην βρει το δοχείο στο σωστό συρτάρι $P(A|B) = 1 - d_i$ και έχουμε

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{p_i(1 - d_i)}{1 - p_i d_i}.$$

Άσκηση 4

Έχουμε k δοχεία που κάθε ένα περιέχει m λευκές και n μαύρες μπάλες. Διαλέγουμε μια μπάλα τυχαία από το πρώτο δοχείο και τη μεταφέρουμε στο δεύτερο δοχείο. Κατόπιν, διαλέγουμε μια μπάλα τυχαία από το δεύτερο δοχείο και τη μεταφέρουμε στο τρίτο δοχείο, κ.ο.κ. Στο τέλος, τραβάμε μια μπάλα από το k -οστό δοχείο. Δείξτε ότι η πιθανότητα η τελευταία μπάλα να είναι λευκή είναι ίση με την πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι λευκή, δηλ. $m/(m+n)$.

Hint: Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε μια λευκή μπάλα από το δεύτερο δοχείο; Γενικεύστε τους υπολογισμούς σας.

Λύση

Έστω το ενδεχόμενο A_i να τραβήξουμε λευκή μπάλα από το i -οστό δοχείο και B_i το ενδεχόμενο να τραβήξουμε μαύρη. Συμβολίζουμε την πιθανότητα $P(A_i) = 1 - P(B_i) = p_i$. Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, έχουμε

$$\begin{aligned}
p_{i+1} &= P(A_{i+1}, A_i) + P(A_{i+1}, B_i) \\
&= P(A_{i+1}|A_i)P(A_i) + P(A_{i+1}|B_i)P(B_i) \\
&= \frac{m+1}{m+n+1}p_i + \frac{m}{m+n+1}(1-p_i) \\
&= \frac{1}{m+n+1}p_i + \frac{m}{m+n+1}.
\end{aligned}$$

Όταν $p_i = m/(m+n)$ (π.χ. όταν $i = 1$), το παραπάνω ισούται με

$$\begin{aligned}
p_{i+1} &= \frac{1}{m+n+1} \cdot \frac{m}{m+n} + \frac{m}{m+n+1} \\
&= \frac{m}{m+n}.
\end{aligned}$$

Άρα, υπό την προϋπόθεση ότι $p_1 = m/(m+n)$, σε κάθε ένα από τα επόμενα δοχεία, η πιθανότητα να τραβήξουμε λευκή μπάλα είναι $m/(m+n)$.

Άσκηση 5

Ένας παίκτης ρίχνει τρία βελάκια, το ένα μετά το άλλο. Έστω D_i το γεγονός το i -οστό βελάκι να χτυπήσει το στόχο. Δίνεται ότι:

- D_1 είναι ανεξάρτητο των D_2 και D_3 ΚΑΙ της τομής τους
- $P(D_1) = 0.8$
- $P(D_2) = 0.8$
- $P(D_3|D_2) = 0.9$
- $P(D_3|D_2^c) = 0.5$

1. Να υπολογίσετε την πιθανότητα τρίτο βελάκι να χτυπήσει το στόχο.
2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα το δεύτερο βελάκι να έχει χτυπήσει το στόχο δεδομένου ότι το τρίτο βελάκι τον έχει χτυπήσει.
3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα και τα τρία βελάκια να χτυπήσουν το στόχο.
4. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ακριβώς δύο βελάκια να χτυπήσουν το στόχο.

Λύση

1.

$$\begin{aligned}
P(D_3) &= P(D_3|D_2)P(D_2) + P(D_3|D_2^c)P(D_2^c) \\
&= 0.9 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.2 \\
&= 0.82
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 P(D_2|D_3) &= \frac{P(D_2, D_3)}{P(D_3)} \\
 &= \frac{P(D_3|D_2)P(D_2)}{P(D_3)} \\
 &= \frac{0.9 \cdot 0.8}{0.82} \\
 &= \frac{72}{82}
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 P(D_1, D_2, D_3) &= P(D_3|D_1, D_2)P(D_2|D_1)P(D_1) \\
 &= P(D_3|D_2)P(D_2)P(D_1) \\
 &= 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \\
 &= 0.576
 \end{aligned}$$

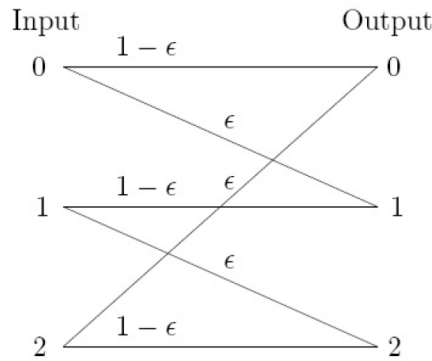
Επίσης, παρατηρούμε ότι αλλάζοντας απλώς τη σειρά στον κανόνα της αλυσίδας, παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}
 P(D_1, D_2, D_3) &= P(D_1|D_2, D_3)P(D_3|D_2)P(D_2) \\
 &= P(D_1)P(D_3|D_2)P(D_2) \\
 &= 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.8 \\
 &= 0.576
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 &P(D_1, D_2, D_3^c \cup D_1, D_2^c, D_3 \cup D_1^c, D_2, D_3) = \\
 &= P(D_1, D_2, D_3^c) + P(D_1, D_2^c, D_3) + P(D_1^c, D_2, D_3) \\
 &= P(D_3^c|D_2)P(D_2)P(D_1) + P(D_3|D_2^c)P(D_2^c)P(D_1) + P(D_3|D_2)P(D_2)P(D_1^c) \\
 &= 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.8 + 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.2 \\
 &= 0.288
 \end{aligned}$$

Άσκηση 6



Σχήμα 1: Τριαδικό τηλεπικοινωνιακό κανάλι

Το διάγραμμα μετάβασης πιθανοτήτων ενός τριαδικού τηλεπικοινωνιακού καναλιού δίνεται στο Σχήμα 1. Όπως φαίνεται, η πιθανότητα να ληφθεί 0 (ή 1, ή 2) ενώ έχει σταλεί 0 (ή 1, ή 2, αντίστοιχα) είναι $1 - \epsilon$. Δηλαδή, $P(0 \text{ received} | 0 \text{ sent}) = P(1 \text{ received} | 1 \text{ sent}) = P(2 \text{ received} | 2 \text{ sent}) = 1 - \epsilon$. Ανάλογα, $P(0 \text{ received} | 2 \text{ sent}) = P(1 \text{ received} | 0 \text{ sent}) = P(2 \text{ received} | 1 \text{ sent}) = \epsilon$. Υποθέστε ότι τα τρία σύμβολα 0, 1, 2 στέλνονται με πιθανότητες $1/2, 1/4, 1/4$, αντίστοιχα.

Ορίστε τα γεγονότα $A_i = \{\eta \text{ είσοδος του καναλιού είναι } i\}$ και $B_i = \{\eta \text{ έξοδος του καναλιού είναι } i\}$, $i = 0, 1, 2$.

1. Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(B_i)$, $i = 0, 1, 2$.
2. Δεδομένου ότι ελήφθη 1 (δηλαδή συνέβη το γεγονός B_1), υπολογίστε τις πιθανότητες ότι εστάλη 0, ή 1, ή 2.

Λύση

1. Για να βρούμε τις πιθανότητες των B_i χρησιμοποιούμε το νόμο της ολικής πιθανότητας

$$\begin{aligned} P(B_0) &= P(B_0|A_0)P(A_0) + P(B_0|A_1)P(A_1) + P(B_0|A_2)P(A_2) \\ &= (1 - \epsilon) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} + \epsilon \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\epsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(B_1|A_0)P(A_0) + P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2) \\ &= \epsilon \cdot \frac{1}{2} + (1 - \epsilon) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2|A_0)P(A_0) + P(B_2|A_1)P(A_1) + P(B_2|A_2)P(A_2) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{2} + \epsilon \cdot \frac{1}{4} + (1 - \epsilon) \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Όπως είναι αναμενόμενο, το άθροισμα των B_i είναι 1.

2. Οι δεσμευμένες πιθανότητες είναι

$$\begin{aligned} P(A_0|B_1) &= \frac{P(A_0, B_1)}{P(B_1)} \\ &= \frac{P(B_1, A_0)}{P(B_1)} \\ &= \frac{P(B_1|A_0)P(A_0)}{P(B_1)} \\ &= \frac{\epsilon \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon} \\ &= \frac{2\epsilon}{1 + \epsilon}, \\ P(A_1|B_1) &= \frac{P(A_1, B_1)}{P(B_1)} \\ &= \frac{P(B_1, A_1)}{P(B_1)} \\ &= \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} \\ &= \frac{(1 - \epsilon) \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon} \\ &= \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A_2|B_1) &= \frac{P(A_2, B_1)}{P(B_1)} \\
&= \frac{P(B_1, A_2)}{P(B_1)} \\
&= \frac{P(B_1|A_2)P(A_2)}{P(B_1)} \\
&= \frac{0\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ξανά, παρατηρούμε ότι το άθροισμα των παραπάνω πιθανοτήτων είναι 1 (όπως ήταν αναμενόμενο).

Άσκηση 7

Μια εταιρία ηλεκτρικής ενέργειας μπορεί να τροφοδοτήσει μια πόλη με ηλεκτρική ενέργεια από n διαφορετικούς σταθμούς. Ο σταθμός i μπορεί να παρουσιάσει βλάβη και να διακόψει τη λειτουργία του, με πιθανότητα p_i , ανεξάρτητα από τους άλλους σταθμούς.

1. Υποθέτοντας ότι οποιοσδήποτε σταθμός μπορεί να παράξει την απαιτούμενη ενέργεια για να τροφοδοτήσει ολόκληρη την πόλη, ποια είναι η πιθανότητα να υπάρξει ολικό *black-out* στην πόλη;
2. Υποθέτοντας ότι είναι απαραίτητοι τουλάχιστον δύο σταθμοί να λειτουργούν για να τροφοδοτηθεί ολόκληρη η πόλη με την απαιτούμενη ηλεκτρική ενέργεια, ποια είναι η πιθανότητα να υπάρξει ολικό *black-out*;

Λύση

Έστω B το ενδεχόμενο του *black-out*.

1. Εφόσον οι σταθμοί παρουσιάζουν βλάβη ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον,

$$P(B) = \prod_{i=1}^n p_i$$

2. Θα υπάρξει *black-out* αν παρουσιάσουν βλάβη είτε όλοι οι n σταθμοί είτε $n - 1$ σταθμοί. Αυτά τα δύο γεγονότα B^n και B^{n-1} , αντίστοιχα, είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα (δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα). Επομένως, $P(B^n \cap B^{n-1}) = 0$ και άρα η πιθανότητα $P(B)$ μπορεί να βρεθεί με το άθροισμα των επί μέρους πιθανοτήτων να συμβεί *black-out*:

$$P(B) = \prod_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n \left((1 - p_i) \prod_{j \neq i} p_j \right)$$