

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό εξάμηνο 2020-2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Σετ Ασκήσεων 2: Δεσμευμένη Πιθανότητα, ΘΟΠ, Νόμος του Bayes,
Ανεξαρτησία.

Ημερομηνία Ανάθεσης: 8/10/2020

Ημερομηνία Παράδοσης: 20/10/2020

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ'επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές. Ένας φίλος μας λέει ότι το ενδεχόμενο να φέρουμε δύο φορές Κορόνα έχει ίση ή μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί αν γνωρίζουμε ότι η πρώτη ρίψη έφερε Κορόνα, απ'ότι αν γνωρίζουμε ότι τουλάχιστον μία από τις δύο ρίψεις έφερε Κορόνα. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του; Συμβαίνει το ίδιο αν είναι δίκαιο είτε άδικο το νόμισμα; Περιγράψτε μαθηματικά τι συμβαίνει όταν το νόμισμα έχει μια αφθαίρετη πιθανότητα $0 < p \leq 1$ να έρθει Κορόνα.

Άσκηση 2

Εργοστάσιο χρησιμοποιεί τρεις διαφορετικές μηχανές για την κατασκευή αντιστάσεων του $1k\Omega$. Το 80% των αντιστάσεων που κατασκευάζει η μηχανή M1 είναι εντός των αποδεκτών ορίων $[950, 1050]\Omega$. Το αντίστοιχο ποσοστό για τις μηχανές M2 και M3 είναι 90% και 60%. Οι μηχανές M1 και M3 παράγουν από 3000 αντιστάσεις την ώρα, ενώ η μηχανή M2 παράγει 4000 αντιστάσεις την ώρα. Οι αντιστάσεις που παράγονται από μια από τις τρεις μηχανές συσκευάζονται όλες μαζί σε μια παρτίδα.

1. Να υπολογίσετε την πιθανότητα μία αντίσταση που επιλέγεται τυχαία από μία παρτίδα να είναι εντός των αποδεκτών ορίων. Σχεδιάστε και το αντίστοιχο δέντρο πιθανοτήτων.
2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα μία αντίσταση με τιμή εντός των αποδεκτών ορίων να έχει κατασκευασθεί από τη μηχανή M3.

Άσκηση 3

Η Μαρία προσπαθεί να βρει στη συρταριέρα της ένα δοχείο με μπάλες, που χρειάζεται για να λύσει μια άσκηση στο μάθημα των Πιθανοτήτων. Ξέρει ότι το έχει αφήσει στο συρτάρι j με πιθανότητα $p_j > 0$. Όμως τα συρτάρια είναι τόσο ακατάστατα, που ακόμη και αν ανοίξει το σωστό συρτάρι i , η πιθανότητα να βρει το δοχείο μέσα σε αυτό είναι μόνο d_i . Η Μαρία ανοίγει ένα συρτάρι i , αλλά δεν βρίσκει μέσα το δοχείο. Με δεδομένο αυτό το γεγονός, δείξτε ότι η πιθανότητα το δοχείο να βρίσκεται στο συρτάρι j , είναι

$$\frac{p_j}{1 - p_i d_i}, \quad \text{αν } j \neq i,$$

$$\frac{p_i(1 - d_i)}{1 - p_i d_i}, \quad \text{αν } j = i.$$

Άσκηση 4

Έχουμε k δοχεία που κάθε ένα περιέχει m λευκές και n μαύρες μπάλες. Διαλέγουμε μια μπάλα τυχαία από το πρώτο δοχείο και τη μεταφέρουμε στο δεύτερο δοχείο. Κατόπιν, διαλέγουμε μια μπάλα τυχαία από το δεύτερο δοχείο και τη μεταφέρουμε στο τρίτο δοχείο, κ.ο.κ. Στο τέλος, τραβάμε μια μπάλα από το k -οστό δοχείο. Δείξτε ότι η πιθανότητα η τελευταία μπάλα να είναι λευκή είναι ίση με την πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι λευκή, δηλ. $m/(m+n)$.

Hint: Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε μια λευκή μπάλα από το δεύτερο δοχείο; Γενικεύστε τους υπολογισμούς σας.

Άσκηση 5

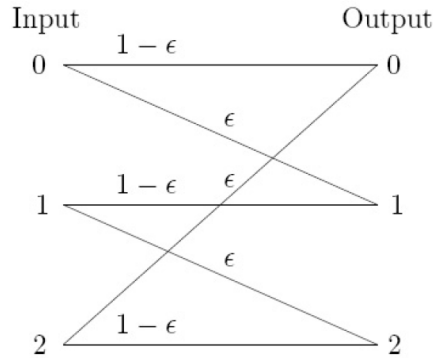
Ένας παίκτης ρίχνει τρία βελάκια, το ένα μετά το άλλο. Έστω D_i το γεγονός το i -οστό βελάκι να χτυπήσει το στόχο. Δίνεται ότι:

- D_1 είναι ανεξάρτητο των D_2 και D_3 ΚΑΙ της τομής τους
- $P(D_1) = 0.8$
- $P(D_2) = 0.8$
- $P(D_3|D_2) = 0.9$
- $P(D_3|D_2^c) = 0.5$

1. Να υπολογίσετε την πιθανότητα τρίτο βελάκι να χτυπήσει το στόχο.
2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα το δεύτερο βελάκι να έχει χτυπήσει το στόχο δεδομένου ότι το τρίτο βελάκι τον έχει χτυπήσει.

3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα και τα τρία βελάκια να χτυπήσουν το στόχο.
4. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ακριβώς δύο βελάκια να χτυπήσουν το στόχο.

Άσκηση 6



Σχήμα 1: Τριαδικό τηλεπικοινωνιακό κανάλι

Το διάγραμμα μετάβασης πιθανοτήτων ενός τριαδικού τηλεπικοινωνιακού καναλιού δίνεται στο Σχήμα 1. Όπως φαίνεται, η πιθανότητα να ληφθεί 0 (ή 1, ή 2) ενώ έχει σταλεί 0 (ή 1, ή 2, αντίστοιχα) είναι $1 - \epsilon$. Δηλαδή, $P(0 \text{ received} | 0 \text{ sent}) = P(1 \text{ received} | 1 \text{ sent}) = P(2 \text{ received} | 2 \text{ sent}) = 1 - \epsilon$. Ανάλογα, $P(0 \text{ received} | 2 \text{ sent}) = P(1 \text{ received} | 0 \text{ sent}) = P(2 \text{ received} | 1 \text{ sent}) = \epsilon$. Υποθέστε ότι τα τρία σύμβολα 0, 1, 2 στέλνονται με πιθανότητες $1/2, 1/4, 1/4$, αντίστοιχα.

Ορίστε τα γεγονότα $A_i = \{\text{η είσοδος του καναλιού είναι } i\}$ και $B_i = \{\text{η έξοδος του καναλιού είναι } i\}$, $i = 0, 1, 2$.

1. Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(B_i)$, $i = 0, 1, 2$.
2. Δεδομένου ότι ελήφθη 1 (δηλαδή συνέβη το γεγονός B_1), υπολογίστε τις πιθανότητες ότι εστάλη 0, ή 1, ή 2.

Άσκηση 7

Μια εταιρία ηλεκτρικής ενέργειας μπορεί να τροφοδοτήσει μια πόλη με ηλεκτρική ενέργεια από n διαφορετικούς σταθμούς. Ο σταθμός i μπορεί να παρουσιάσει βλάβη και να διακόψει τη λειτουργία του, με πιθανότητα p_i , ανεξάρτητα από τους άλλους σταθμούς.

1. Υποθέτοντας ότι οποιοσδήποτε σταθμός μπορεί να παράξει την απαιτούμενη ενέργεια για να τροφοδοτήσει ολόκληρη την πόλη, ποια είναι η πιθανότητα να υπάρξει ολικό *black-out* στην πόλη;
2. Υποθέτοντας ότι είναι απαραίτητοι τουλάχιστον δύο σταθμοί να λειτουργούν για να τροφοδοτηθεί ολόκληρη η πόλη με την απαιτούμενη ηλεκτρική ενέργεια, ποια είναι η πιθανότητα να υπάρξει ολικό *black-out*;