

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

- (i) $S = \{(r, r), (r, g), (r, b), (g, r), (g, g), (g, b), (b, r), (b, g), (b, b)\}$
(ii) $S = \{(r, g), (r, b), (g, r), (g, b), (b, r), (b, g)\}$

Άσκηση 2. Από ένα διάγραμμα Venn μπορεί εύκολα να δει κανείς ότι για δύο σύνολα S, T ισχύει η ισότητα:

$$S = (S \cap T) \cup (S \cap T^c)$$

(i) Για $S = A^c$ και $T = B$ εξάγεται η ισότητα:

$$A^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$$

(ii) Για $S = B^c$ και $T = A$ εξάγεται η ισότητα:

$$B^c = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$$

(iii) Από τους νόμους του De Morgan ισχύει:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Επομένως, από τις ισότητες (i) και (ii) ισχύει:

$$(A \cap B)^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c)$$

(iv) Έχουμε $A = \{1, 3, 5\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$, άρα $A \cap B = \{1, 3\}$.

Επομένως:

$$(A \cap B)^c = \{2, 4, 5, 6\}$$

$$A^c \cap B = \{2\}$$

$$A^c \cap B^c = \{4, 6\}$$

$$A \cap B^c = \{5\}$$

$$(A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c) = \{2, 4, 5, 6\} = (A \cap B)^c$$

Άσκηση 3.

(i) Διαλέγουμε τυχαία έναν πελάτη. Έστω E το γεγονός ότι ο πελάτης έχει μαζί του ευρώ και Δ το γεγονός ότι έχει μαζί του δολάρια.

$$P(E \cup \Delta) = P(E) + P(\Delta) - P(E\Delta) = 0.24 + 0.61 - 0.11 = 0.74$$

Επομένως, 74% των πελατών μπορεί να πληρώσει στο συγκεκριμένο κατάστημα.

(ii) Έστω Σ το γεγονός ένας εργαζόμενος να φορά σκουφί και K να φορά κασκόλ.

$$(\alpha) P(\Sigma \cup K) = 1 - P(\Sigma^c K^c) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$(\beta) P(\Sigma \cup K) = P(\Sigma) + P(K) - P(\Sigma K) = 0.2 + 0.3 - P(\Sigma K)$$

$$\text{Έτσι, } P(\Sigma K) = 0.1$$

Άσκηση 4.

(i) Ο δειγματοχώρος της άσκησης και οι πιθανότητες όλων των αποτελεσμάτων φαίνονται στον πίνακα παρακάτω. Οι πιθανότητες αυτές είναι συναρτήση της πιθανότητας $p \in [0, 1]$ που πρέπει να υπολογίσουμε για να απαντήσουμε στα επόμενα υποερωτήματα.

Ζάρι 1	Ζάρι 2	Αποτέλεσμα	Πιθανότητα
1	1	1	p
1	2	2	$2p$
1	3	3	$3p$
1	4	4	$4p$
2	1	2	$2p$
2	2	4	$4p$
2	3	6	$6p$
2	4	8	$8p$
3	1	3	$3p$
3	2	6	$6p$
3	3	9	$9p$
3	4	12	$12p$
4	1	4	$4p$
4	2	8	$8p$
4	3	12	$12p$
4	4	16	$16p$
		Σύνολο	$100p$

Για να υπολογίσουμε το p αρκεί να σκεφτούμε ότι $P(\Omega) = 1$ οπότε $100p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{100} = 0.01$

(ii) Έστω A το γεγονός ότι το γινόμενο είναι ζυγός αριθμός, τότε έχουμε ότι:

$$P(A) = 2p + 4p + 2p + 4p + 6p + 8p + 6p + 12p + 4p + 8p + 12p + 16p = 84p = 0.84.$$

(iii) Έστω B το γεγονός ότι τα ζάρια έφεραν 2 και 3, τότε έχουμε ότι:

$$P(B) = P(2, 3) + P(3, 2) = 6p + 6p = 12p = 0.12.$$

Άσκηση 5.

(i) Έχουμε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ και $P(A \cup B) \leq 1$. Έτσι, συνεπάγεται η ζητούμενη ανισότητα $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

(ii) Από το νόμο του De Morgan έχουμε ότι:

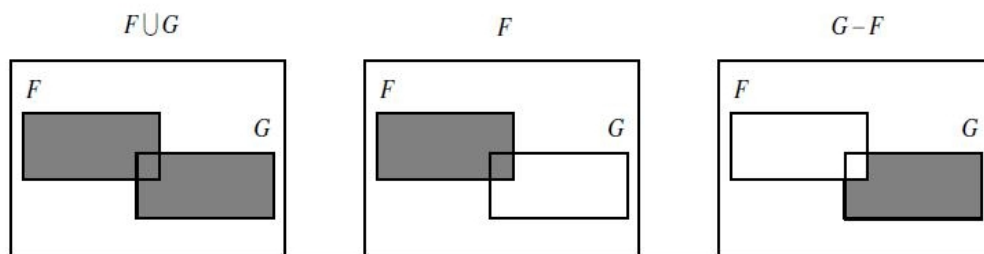
$$\begin{aligned}
 & 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\
 &= P((A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)^c) \\
 &= P(A_1^c \cup \dots \cup A_n^c) \\
 &\leq P(A_1^c) + \dots + P(A_n^c) \\
 &= (1 - P(A_1)) + \dots + (1 - P(A_n)) \\
 &= n - P(A_1) - \dots - P(A_n).
 \end{aligned}$$

Δηλαδή:

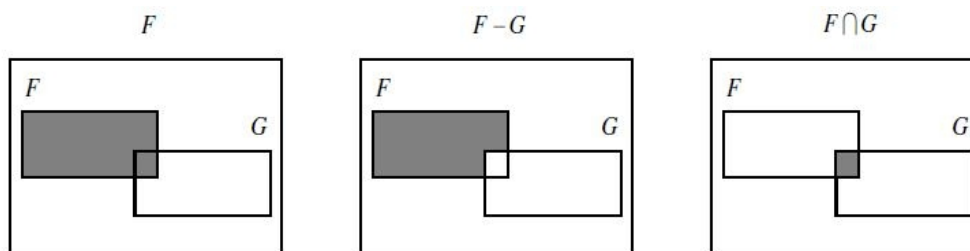
$$\begin{aligned}
 & 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \leq n - P(A_1) - \dots - P(A_n) \Leftrightarrow \\
 & P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - (n-1)
 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

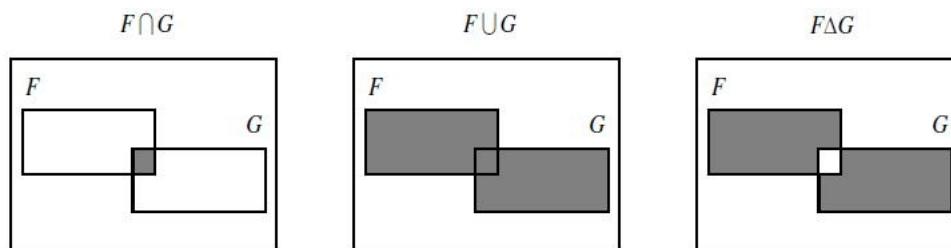
Τα διαγράμματα Venn που εμφανίζονται στα σχήματα 1,2,3 και 4 αντιστοιχούν στα ερωτήματα α, β, δ και ε. Για το ερώτημα γ, η πιθανότητα $P(F \cup G)$ μπορεί να εκφραστεί σαν $P(F - G) + P(G - F) + P(F \cap G)$.



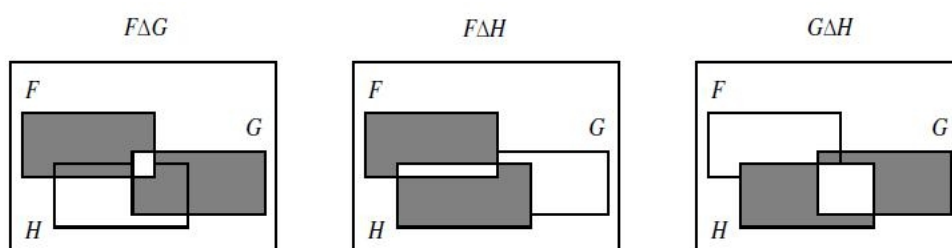
Σχήμα 1: Διάγραμμα Venn του προβλήματος 1(α)



Σχήμα 2: Διάγραμμα Venn του προβλήματος 1(β)



Σχήμα 3: Διάγραμμα Venn του προβλήματος 1(δ)



Σχήμα 4: Διάγραμμα Venn του προβλήματος 1(ε)