

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 25/9/2020

Ημερομηνία Παράδοσης: 06/10/2020

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1. Ένα κουτί περιέχει 3 μπίλιες, 1 κόκκινη, 1 πράσινη και 1 μπλε. Θεωρείστε ένα πείραμα κατά το οποίο παίρνουμε μια μπίλια από το κουτί, την επανατοποθετούμε στο κουτί και τραβάμε μια δεύτερη μπίλια από το κουτί. Περιγράψετε το δειγματικό χώρο. Επαναλάβετε τραβώντας τη δεύτερη μπίλια χωρίς την επανατοποθέτηση της πρώτης.

Άσκηση 2. Έστω δύο σύνολα A και B. Δείξτε ότι:

(i). $A^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

(ii). $B^c = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$

(iii). $(A \cap B)^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c)$

(iv). Ρίχνουμε ένα ζάρι. Έστω A το σύνολο των ενδεχομένων να έρθει περιττός αριθμός και B το σύνολο των ενδεχομένων να έρθει αριθμός μικρότερος του τέσσερα. Υπολογίστε τα σύνολα των δύο πλευρών της ισότητας (iii) και εξακριβώστε ότι η ισότητα ισχύει.

Άσκηση 3.

(i) Ένα μαγαζί με σουβενίρ δέχεται πληρωμές σε ευρώ ή δολάρια και δε διαθέτει μηχάνημα POS. 24% των πελατών έχουν μαζί τους ευρώ, 61% δολάρια και 11% και ευρώ και δολάρια. Τι ποσοστό των πελατών έχει στη διάθεσή του χρήματα με τα οποία να μπορεί να πληρώσει στο συγκεκριμένο κατάστημα;

(ii) 60% των εργαζομένων σε μία εταιρεία δε φορούν ούτε σκουφί ούτε κασκόλ. 20% φορούν σκουφί και 30% φορούν κασκόλ. Αν διαλέξουμε στην τύχη έναν εργαζόμενο, ποια η πιθανότητα αυτός να φορά:

(α) ένα σκουφί ή ένα κασκόλ (ή και τα δύο);

(β) ένα σκουφί και ένα κασκόλ;

Άσκηση 4. Ο Γιάννης έχει ένα ζευγάρι από 'πειραγμένα' τετράεδρα ζάρια. Σε κάθε ρίψη, η πιθανότητα να φέρει ένα οποιοδήποτε ζεύγος είναι ανάλογη του γινομένου των δύο αριθμών που έφεραν τα ζάρια. Θεωρείστε ότι ζεύγη της μορφής (x, y) και (y, x) είναι δύο διαφορετικά ζεύγη.

(i) Περιγράψτε το δειγματοχώρο του πειράματος.

(ii) Ποια η πιθανότητα το γινόμενο να είναι ζυγός αριθμός;

(iii) Ποια η πιθανότητα να φέρει ένα από τα ζάρια 2 και το άλλο 3;

Άσκηση 5.

(i) Αποδείξτε ότι για δύο τυχαία γεγονότα A και B ισχύει:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

(ii). Γενικεύοντας το (i) για n γεγονότα $A_1, A_2, \dots, A_n$, δείξτε ότι:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - (n-1)$$

Άσκηση 6. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες χρησιμοποιώντας διαγράμματα Venn. Σημειώστε ότι η διαφορά ισούται με $F - G = F \cap G^c$ και η συμμετρική διαφορά ως $F \Delta G = (F \cap G^c) \cup (G \cap F^c)$.

(α) Αποδείξτε ότι $F \cup G = F \cup (G - F)$

(β) Αποδείξτε ότι $F = (F - G) \cup (F \cap G)$

(γ) Γράψτε το $F \cup G$ σαν ένωση τριών ξένων συνόλων. Χρησιμοποιήστε τα δύο προηγούμενα ερωτήματα.

(δ) Αποδείξτε ότι $F \cap G = (F \cup G) - (F \Delta G)$

(ε) Για κάθε γεγονός F, G και H δείξτε ότι $P(F \Delta G) \leq P(F \Delta H) + P(H \Delta G)$