

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217 - Θεωρία Πιθανοτήτων 2020
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
22 Ιανουαρίου 2021 - Διάρκεια: 2 Ώρες
Θέμα 3

Θέμα 3.1

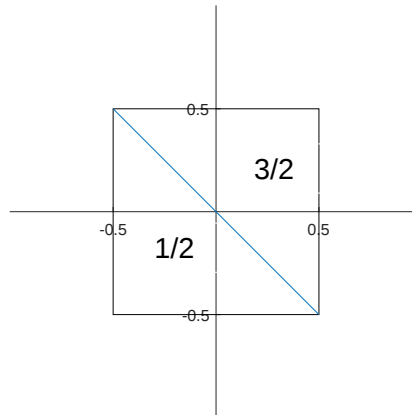
Δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.5 & \text{για } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq y < \frac{1}{2}, \text{ και } -1 \leq x+y < 0, \\ 1.5 & \text{για } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq y < \frac{1}{2}, \text{ και } 0 \leq x+y < 1, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (α) Δώστε τη γραφική παράσταση του πεδίου τιμών και της από κοινού $\sigma.\pi.\pi.$ των $t.μ.$ X και Y .
(β) Βρείτε τις περιθωριακές $\sigma.\pi.\pi.$ των X και Y . Είναι αυτές οι δύο $t.μ.$ ανεξάρτητες μεταξύ τους;
(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X+Y \leq 0.5)$.
(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X^2 + Y^2 \geq \frac{1}{4})$.

Λύση:

(α)



(β)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_{X,Y}(x,y) dy \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{-x} \frac{1}{2} dy + \int_{-x}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} [y]_{-\frac{1}{2}}^{-x} + \frac{3}{2} [y]_{-x}^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2}x \\ &= 1+x, \quad -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα

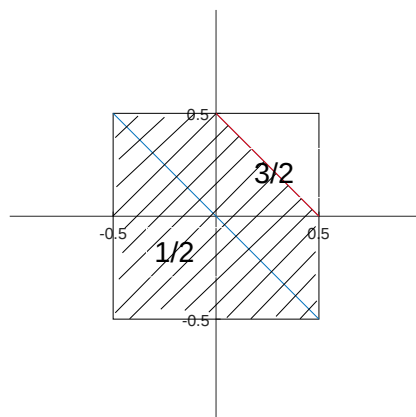
$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Ομοίως λόγω συμμετρίας:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1+y, & -\frac{1}{2} \leq y < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

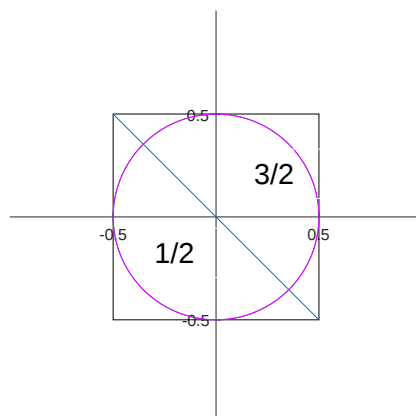
Προφανώς $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ και οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(γ)



$$\begin{aligned} P(X+Y \leq 0.5) &= 1 - P(X+Y > 0.5) \\ &= 1 - \frac{3 \cdot 0.5 \cdot 0.5}{2 \cdot 2} \\ &= 1 - \frac{3}{8} \\ &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

(δ)



$$\begin{aligned}P(X^2 + Y^2 \geq \frac{1}{4}) &= 1 - (\text{εμβαδόν μισού κύκλου} \cdot \frac{1}{2} + \text{εμβαδόν μισού κύκλου} \cdot \frac{3}{2}) \\&= 1 - (0.5 \cdot \pi \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 0.5 \cdot \pi \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2}) \\&= 1 - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Θέμα 3.2

Δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.5 & \text{για } 1 \leq x < 2, 1 \leq y < 2, \text{ και } 2 \leq x+y < 3, \\ 1.5 & \text{για } 1 \leq x < 2, 1 \leq y < 2, \text{ και } 3 \leq x+y < 4, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση του πεδίου τιμών και της από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X και Y .

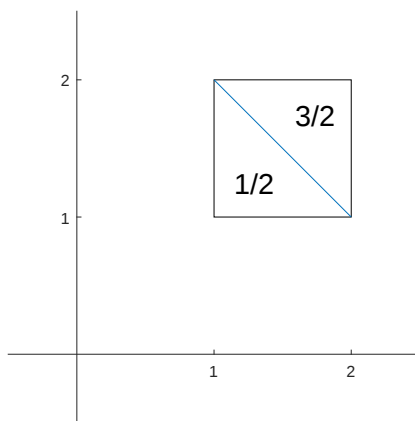
(β) Βρείτε τις περιθωριακές σ.π.π. των X και Y . Είναι αυτές οι δύο τ.μ. ανεξάρτητες μεταξύ τους;

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X+Y \leq 3.25)$.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P((X-1)^2 + (Y-1)^2 \geq 1)$.

Λύση:

(α)



(β)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_1^2 f_{X,Y}(x,y) dy \\ &= \int_1^{3-x} \frac{1}{2} dy + \int_{3-x}^2 \frac{3}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} [y]_1^{3-x} + \frac{3}{2} [y]_{3-x}^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + x, \quad 1 \leq x < 2. \end{aligned}$$

Άρα

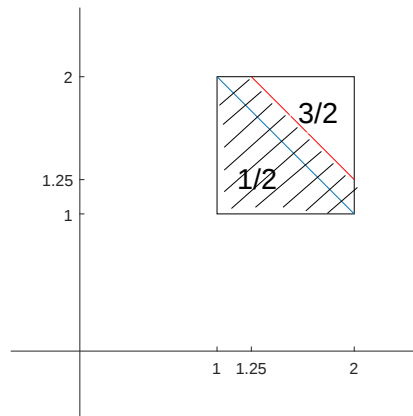
$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Ομοίως λόγω συμμετρίας:

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + y, & 1 \leq y < 2 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

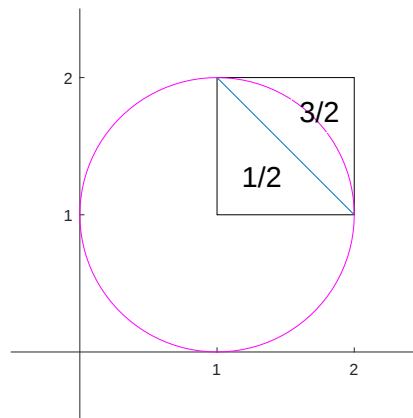
Προφανώς $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ και οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(γ)



$$\begin{aligned}
 P(X + Y \leq 3.25) &= 1 - P(X + Y > 3.25) \\
 &= 1 - \frac{3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{2 \cdot 2} \\
 &= 1 - \frac{3 \cdot \frac{9}{16}}{2 \cdot 2} \\
 &= \frac{37}{64}.
 \end{aligned}$$

(δ)



$$\begin{aligned}
 P((X - 1)^2 + (Y - 1)^2 \geq 1) &= (1 - 1/4 \text{ εμβαδόν κύκλου}) \cdot \frac{3}{2} \\
 &= (1 - \frac{\pi}{4}) \cdot \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Θέμα 3.3

Δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.5 & \text{για } -1 \leq x < 0, -1 \leq y < 0, \text{ και } -2 \leq x+y < -1, \\ 1.5 & \text{για } -1 \leq x < 0, -1 \leq y < 0, \text{ και } -1 \leq x+y < 0, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση του πεδίου τιμών και της από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X και Y .

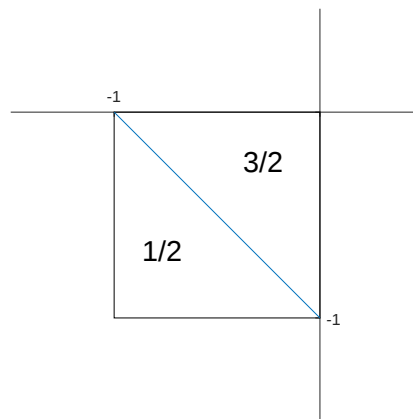
(β) Βρείτε τις περιθωριακές σ.π.π. των X και Y . Είναι αυτές οι δύο τ.μ. ανεξάρτητες μεταξύ τους;

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X+Y \leq -1.5)$.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P((X + \frac{1}{2})^2 + (Y + \frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{4})$.

Λύση:

(α)



(β)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-1}^0 f_{X,Y}(x,y) dy \\ &= \int_{-1}^{-1-x} \frac{1}{2} dy + \int_{-1-x}^0 \frac{3}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} [y]_{-1}^{-1-x} + \frac{3}{2} [y]_{-1-x}^0 \\ &= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x \\ &= \frac{3}{2} + x, \quad -1 \leq x < 0. \end{aligned}$$

Άρα

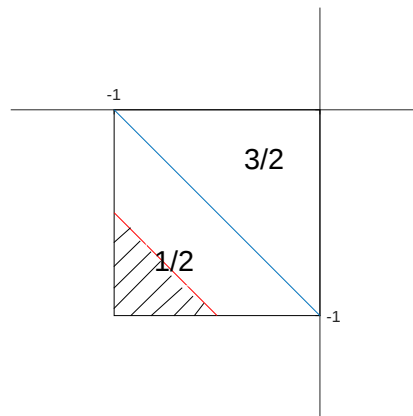
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} + x, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Ομοίως λόγω συμμετρίας:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2} + y, & -1 \leq y < 0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

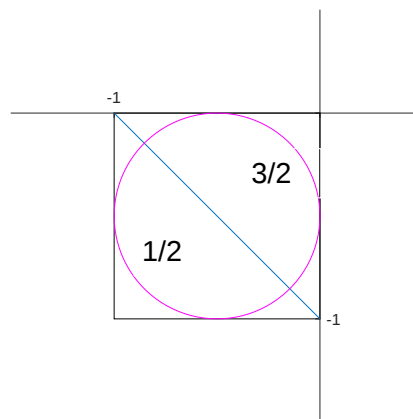
Προφανώς $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ και οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(γ)



$$\begin{aligned}
 P(X + Y \leq -1.5) &= \frac{1}{2} \frac{0.5 \cdot 0.5}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{8} \\
 &= \frac{1}{16}.
 \end{aligned}$$

(δ)



$$\begin{aligned}
 P\left(\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}\right) &= 1 - (\text{εμβαδόν μισού κύκλου} \cdot \frac{1}{2} + \text{εμβαδόν μισού κύκλου} \cdot \frac{3}{2}) \\
 &= 1 - \left(0.5 \cdot \pi \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 0.5 \cdot \pi \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2}\right) \\
 &= 1 - \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Θέμα 3.4

Δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.5 & \text{για } -2 \leq x < -1, -2 \leq y < -1, \text{ και } -4 \leq x+y < -3, \\ 1.5 & \text{για } -2 \leq x < -1, -2 \leq y < -1, \text{ και } -3 \leq x+y < -2, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση του πεδίου τιμών και της από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X και Y .

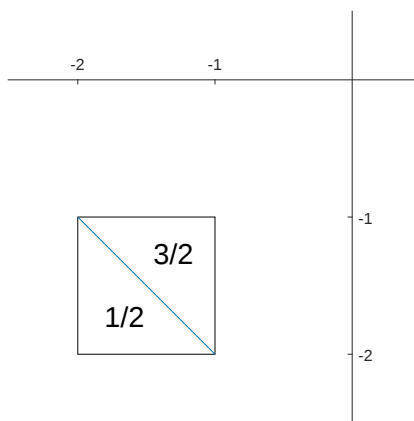
(β) Βρείτε τις περιθωριακές σ.π.π. των X και Y . Είναι αυτές οι δύο τ.μ. ανεξάρτητες μεταξύ τους;

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X+Y > -3.5)$.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P((X+1)^2 + (Y+1)^2 \geq 1)$.

Λύση:

(α)



(β)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-2}^{-1} f_{X,Y}(x,y) dy \\ &= \int_{-2}^{-3-x} \frac{1}{2} dy + \int_{-3-x}^{-1} \frac{3}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} [y]_{-2}^{-3-x} + \frac{3}{2} [y]_{-3-x}^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + 3 + \frac{3}{2}x \\ &= \frac{5}{2} + x, \quad -2 \leq x < -1. \end{aligned}$$

Άρα

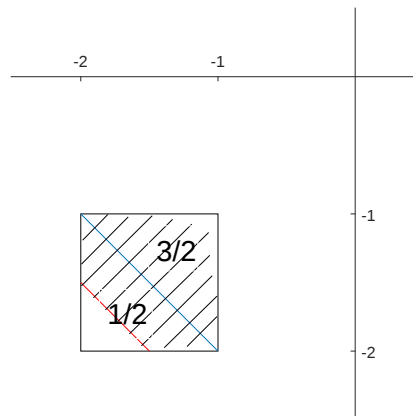
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} + x, & -2 \leq x < -1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Ομοίως λόγω συμμετρίας:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{5}{2} + y, & -2 \leq y < -1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

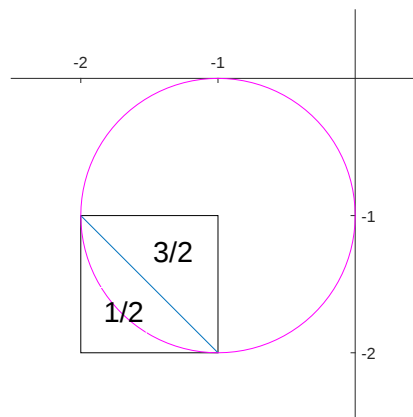
Προφανώς $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ και οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(γ)



$$\begin{aligned}
 P(X + Y > -3.5) &= 1 - P(X + Y \leq -3.5) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \frac{0.5 \cdot 0.5}{2} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \\
 &= \frac{15}{16}.
 \end{aligned}$$

(δ)



$$\begin{aligned}
 P((X - 1)^2 + (Y - 1)^2 \geq 1) &= (1 - 1/4 \text{ εμβαδόν κύκλου}) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= (1 - \frac{\pi}{4}) \cdot \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Θέμα 3.5

Δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{για } -1 \leq x < 1, -1 \leq y < 1, \text{ και } -2 \leq x+y < 0, \\ \frac{3}{8} & \text{για } -1 \leq x < 1, -1 \leq y < 1, \text{ και } 0 \leq x+y < 2, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση του πεδίου τιμών και της από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X και Y .

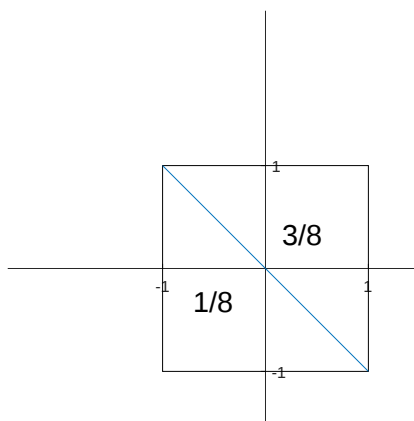
(β) Βρείτε τις περιθωριακές σ.π.π. των X και Y . Είναι αυτές οι δύο τ.μ. ανεξάρτητες μεταξύ τους;

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X+Y \leq 1)$.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P((X+1)^2 + (Y-1)^2 \geq 1)$.

Λύση:

(α)



(β)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-1}^1 f_{X,Y}(x,y) dy \\ &= \int_{-1}^{-x} \frac{1}{8} dy + \int_{-x}^1 \frac{3}{8} dy \\ &= \frac{1}{8} [y]_{-1}^{-x} + \frac{3}{8} [y]_{-x}^1 \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}x + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}x \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x, \quad -1 \leq x < 1. \end{aligned}$$

Άρα

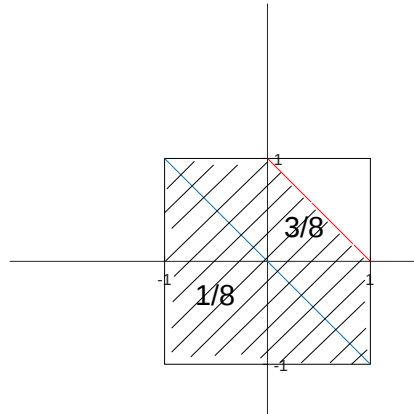
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x, & -1 \leq x < 1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Ομοίως λόγω συμμετρίας:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y, & -1 \leq y < 1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

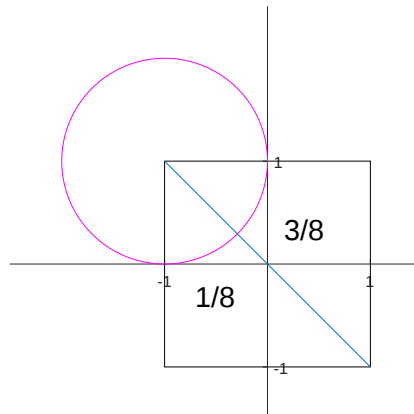
Προφανώς $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ και οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(γ)



$$\begin{aligned}
 P(X + Y \leq 1) &= 1 - P(X + Y > 1) \\
 &= 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 1 - \frac{3}{16} \\
 &= \frac{13}{16}.
 \end{aligned}$$

(δ)



$$\begin{aligned}
 P((X + 1)^2 + (Y - 1)^2 \geq 1) &= (4 - 1/4 \text{ εμβαδόν κύκλου}) \cdot (0.5 \cdot \frac{1}{8} + 0.5 \cdot \frac{3}{8}) \\
 &= (4 - \frac{\pi}{4}) \cdot \frac{4}{16} \\
 &= 1 - \frac{\pi}{16}.
 \end{aligned}$$