

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
22 Ιανουαρίου 2021 - Διάρκεια: 2 Ώρες
Θέμα 2

Θέμα 2.1

Ο Γιώργος και ο Νίκος, επιθυμώντας να κάνουν ένα διάλειμμα από την προετοιμασία τους για την τελική εξέταση του ΗΥ-217 αποφασίζουν να πάνε για σωματική άσκηση στο δημοτικό γήπεδο της πόλης (στέλνοντας πρώτα τον κατάλληλο κωδικό). Ο Κώστας, όντας περισσότερο αγχωμένος σχετικά με το διάβασμά του, αποφασίζει να μείνει στο σπίτι του, και σχεδιάζει ένα στατιστικό μοντέλο σχετικά με την "έξοδο" των φίλων του.

Πιο συγκεκριμένα, Ο Γιώργος και ο Νίκος θα τρέξουν συνολικά 4 γύρους, και σε κάθε γύρο η διαφορά (σε μέτρα) του Γιώργου από τον Νίκο είναι μία Κανονική Τ.Μ. με μέση τιμή $\mu = 1$ και διασπορά $\sigma^2 = 10$. Επίσης, το μοντέλο του Κώστα υποθέτει ότι:

- Οι διαφορές Γιώργου-Νίκου (σε μέτρα) κατά τους 4 γύρους είναι ανεξάρτητες Τ.Μ.
- Τελικός νικητής είναι εκείνος του οποίου οι "πόντοι" (αθροίζοντας τις επιμέρους διαφορές των γύρων) είναι περισσότεροι στο τέλος.
- 1 "πόντος" = διαφορά 1 μέτρου.

Στη συνέχεια, εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$.

- (i) Ποια η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος;
- (ii) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι μετά τους 3 πρώτους γύρους το σκορ είναι ισόπαλο;
- (iii) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι μετά τους 2 πρώτους γύρους χάνει με 5 πόντους;

Λύση:

Έστω X_i η διαφορά των πόντων κάθε γύρου, μεταξύ του Γιώργου και του Νίκου ($i = 1, 2, 3, 4$). Τότε, σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε ότι:

- $X_i \sim N(1, 10)$, $i = 1, 2, 3, 4$
 - Οι X_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους Κανονικές Τ.Μ.
- (i) Για να κερδίσει ο Νίκος, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 4 γύρων X_i) θα πρέπει να είναι αρνητική. Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$P_1 = P(\text{Κερδίζει ο Νίκος}) = P\left(\sum_{i=1}^4 X_i < 0\right)$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$\sum_{i=1}^4 X_i \sim N(4 \cdot 1, 4 \cdot 10) \equiv N(4, 40)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_1 , έχουμε:

$$\begin{aligned}
P_1 &= P\left(\sum_{i=1}^4 X_i < 0\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^4 X_i - 4}{\sqrt{40}} < \frac{0-4}{\sqrt{40}}\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^4 X_i - 4}{\sqrt{40}} < \frac{-4}{\sqrt{40}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{-4}{\sqrt{40}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{40}}\right) = 1 - 0.7365 = 0.2635
\end{aligned}$$

- (ii) Για να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι μετά τους 3 πρώτους γύρους το σκορ είναι ισόπαλο, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 4 γύρων X_i) θα πρέπει να είναι θετική υπό την προϋπόθεση ότι στο τέλος του 3-ου γύρου ήταν ίση με 0. Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$\begin{aligned}
P_2 &= P(\text{Κερδίζει ο Γιώργος} \mid \text{μετά τους 3 πρώτους γύρους το σκορ είναι ισόπαλο}) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 0\right) = P(X_4 - 0 > 0) = P(X_4 > 0)
\end{aligned}$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$X_4 \sim N(1 \cdot 1, 1 \cdot 10) \equiv N(1, 10)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_2 , έχουμε:

$$\begin{aligned}
P_2 &= P(X_4 > 0) = P\left(\frac{X_4 - 1}{\sqrt{10}} > \frac{0-1}{\sqrt{10}}\right) = 1 - P\left(\frac{X_4 - 1}{\sqrt{10}} \leq \frac{0-1}{\sqrt{10}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right) = 1 - 1 + \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 0.6241
\end{aligned}$$

- (iii) Για να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι μετά τους 2 πρώτους γύρους χάνει με 5 πόντους, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 4 γύρων X_i) θα πρέπει να είναι θετική υπό την προϋπόθεση ότι στο τέλος του 2-ου γύρου ήταν ίση με -5 . Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$\begin{aligned}
P_3 &= P(\text{Κερδίζει ο Γιώργος,} \mid \text{στο τέλος του 2-ου γύρου χάνει με 5 πόντους}) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0 \mid X_1 + X_2 = -5\right) = P(X_3 + X_4 - 5 > 0) = P(X_3 + X_4 > 5)
\end{aligned}$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$X_3 + X_4 \sim N(2 \cdot 1, 2 \cdot 10) \equiv N(2, 20)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_3 , έχουμε:

$$\begin{aligned}
P_3 &= P(X_3 + X_4 > 5) = P\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{20}} > \frac{5-2}{\sqrt{20}}\right) = 1 - P\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{20}} \leq \frac{5-2}{\sqrt{20}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{20}}\right) = 1 - 0.7488 = 0.2512
\end{aligned}$$

Θέμα 2.2

Ο Γιώργος και ο Νίκος, επιθυμώντας να κάνουν ένα διάλειμμα από την προετοιμασία τους για την τελική εξέταση του ΗΥ-217 αποφασίζουν να πάνε για σωματική άσκηση στο δημοτικό γήπεδο της πόλης (στέλνοντας πρώτα τον κατάλληλο κωδικό). Ο Κώστας, όντας περισσότερο αγχωμένος σχετικά με το διάβασμά του, αποφασίζει να μείνει στο σπίτι του, και σχεδιάζει ένα στατιστικό μοντέλο σχετικά με την "έξοδο" των φίλων του.

Πιο συγκεκριμένα, Ο Γιώργος και ο Νίκος θα τρέξουν συνολικά 8 γύρους, και σε κάθε γύρο η διαφορά (σε μέτρα) του Γιώργου από τον Νίκο είναι μία Κανονική Τ.Μ. με μέση τιμή $\mu = 0.5$ και διασπορά $\sigma^2 = 9$. Επίσης, το μοντέλο του Κώστα υποθέτει ότι:

- Οι διαφορές Γιώργου-Νίκου (σε μέτρα) κατά τους 8 γύρους είναι ανεξάρτητες Τ.Μ.
- Τελικός νικητής είναι εκείνος του οποίου οι "πόντοι" (αθροίζοντας τις επιμέρους διαφορές των γύρων) είναι περισσότεροι στο τέλος.
- 1 "πόντος" = διαφορά 1 μέτρου.

Στη συνέχεια, εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$.

- Ποια η πιθανότητα να κερδίσει ο Γιώργος;
- Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι στους 5 πρώτους γύρους είναι πίσω στο σκορ κατά 5 πόντους;
- Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι στο τέλος του 7-ου γύρου προηγείται με 5 πόντους;

Λύση:

Έστω X_i η διαφορά των πόντων κάθε γύρου, μεταξύ του Γιώργου και του Νίκου ($i = 1, 2, \dots, 8$). Τότε, σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε ότι:

- $X_i \sim N(0.5, 9)$, $i = 1, 2, \dots, 8$
 - Οι X_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους Κανονικές Τ.Μ.
- Για να κερδίσει ο Γιώργος, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 8 γύρων X_i) θα πρέπει να είναι θετική. Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$P_1 = P(\text{Κερδίζει ο Γιώργος}) = P\left(\sum_{i=1}^8 X_i > 0\right)$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$\sum_{i=1}^8 X_i \sim N(8 \cdot 0.5, 8 \cdot 9) \equiv N(4, 72)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_1 , έχουμε:

$$\begin{aligned} P_1 &= P\left(\sum_{i=1}^8 X_i > 0\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^8 X_i - 4}{\sqrt{72}} > \frac{0 - 4}{\sqrt{72}}\right) = 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^8 X_i - 4}{\sqrt{72}} \leq \frac{0 - 4}{\sqrt{72}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{-4}{\sqrt{72}}\right) = 1 - 1 + \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{72}}\right) = \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{72}}\right) = 0.6813 \end{aligned}$$

- (ii) Για να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι στους 5 πρώτους γύρους είναι πίσω στο σκορ κατά 5 πόντους, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 8 γύρων X_i) θα πρέπει να είναι θετική υπό την προϋπόθεση ότι στο τέλος των 5 πρώτων γύρων ήταν ίση με -5 . Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$\begin{aligned}
 P_2 &= P(\text{Κερδίζει ο Γιώργος} \mid \text{στοις 5 πρώτους γύρους είναι πίσω στο σκορ κατά 5 πόντους}) \\
 &= P\left(\sum_{i=1}^8 X_i > 0 \mid X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = -5\right) \\
 &= P(X_6 + X_7 + X_8 - 5 > 0) \\
 &= P(X_6 + X_7 + X_8 > 5)
 \end{aligned}$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$X_6 + X_7 + X_8 \sim N(3 \cdot 0.5, 3 \cdot 9) \equiv N(1.5, 27)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_2 , έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P_2 &= P(X_6 + X_7 + X_8 > 5) = P\left(\frac{X_6 + X_7 + X_8 - 1.5}{\sqrt{27}} > \frac{5 - 1.5}{\sqrt{27}}\right) \\
 &= 1 - P\left(\frac{X_6 + X_7 + X_8 - 1.5}{\sqrt{27}} \leq \frac{5 - 1.5}{\sqrt{27}}\right) \\
 &= 1 - \Phi\left(\frac{3.5}{\sqrt{27}}\right) = 1 - 0.7497 = 0.2503
 \end{aligned}$$

- (iii) Για να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι στο τέλος του 7-ου γύρου προηγείται με 5 πόντους, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 8 περιόδων X_i) θα πρέπει να είναι θετική υπό την προϋπόθεση ότι στο τέλος του 7-ου γύρου ήταν ίση με 5. Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$\begin{aligned}
 P_3 &= P(\text{Κερδίζει ο Γιώργος,} \mid \text{στο τέλος του 7-ου γύρου προηγείται με 5 πόντους}) \\
 &= P\left(\sum_{i=1}^8 X_i > 0 \mid X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 = 5\right) \\
 &= P(X_8 + 5 > 0) = P(X_8 > -5)
 \end{aligned}$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$X_8 \sim N(1 \cdot 0.5, 1 \cdot 9) \equiv N(0.5, 9)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_3 , έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P_3 &= P(X_8 > -5) = P\left(\frac{X_8 - 0.5}{\sqrt{9}} > \frac{-5 - 0.5}{\sqrt{9}}\right) = 1 - P\left(\frac{X_8 - 0.5}{\sqrt{9}} \leq \frac{-5 - 0.5}{\sqrt{9}}\right) \\
 &= 1 - \Phi\left(\frac{-5.5}{\sqrt{9}}\right) = 1 - 1 + \Phi\left(\frac{5.5}{\sqrt{9}}\right) = \Phi\left(\frac{5.5}{\sqrt{9}}\right) = 0.9666
 \end{aligned}$$

Θέμα 2.3

Ο Γιώργος και ο Νίκος, επιθυμώντας να κάνουν ένα διάλειμμα από την προετοιμασία τους για την τελική εξέταση του ΗΥ-217 αποφασίζουν να πάνε για σωματική άσκηση στο δημοτικό γήπεδο της πόλης (στέλνοντας πρώτα τον κατάλληλο κωδικό). Ο Κώστας, όντας περισσότερο αγχωμένος σχετικά με το διάβασμά του, αποφασίζει να μείνει στο σπίτι του, και σχεδιάζει ένα στατιστικό μοντέλο σχετικά με την "έξοδο" των φίλων του.

Πιο συγκεκριμένα, Ο Γιώργος και ο Νίκος θα τρέξουν συνολικά 10 γύρους, και σε κάθε γύρο η διαφορά (σε μέτρα) του Γιώργου από τον Νίκο είναι μία Κανονική Τ.Μ. με μέση τιμή $\mu = 0.25$ και διασπορά $\sigma^2 = 8$. Επίσης, το μοντέλο του Κώστα υποθέτει ότι:

- Οι διαφορές Γιώργου-Νίκου (σε μέτρα) κατά τους 10 γύρους είναι ανεξάρτητες Τ.Μ.
- Τελικός νικητής είναι εκείνος του οποίου οι "πόντοι" (αθροίζοντας τις επιμέρους διαφορές των γύρων) είναι περισσότεροι στο τέλος.
- 1 "πόντος" = διαφορά 1 μέτρου.

Στη συνέχεια, εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$.

- Ποια η πιθανότητα να κερδίσει ο Γιώργος με διαφορά μεγαλύτερη των 15 πόντων;
- Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι στους 6 πρώτους γύρους είναι μπροστά στο σκορ κατά 5 πόντους;
- Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος δεδομένου ότι στο τέλος του 1-ου γύρου προηγείται με 5 πόντους;

Λύση:

Έστω X_i η διαφορά των πόντων κάθε γύρου, μεταξύ του Γιώργου και του Νίκου ($i = 1, 2, \dots, 10$). Τότε, σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε ότι:

- $X_i \sim N(0.25, 8)$, $i = 1, 2, \dots, 10$
 - Οι X_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους Κανονικές Τ.Μ.
- (i) Για να κερδίσει ο Γιώργος με διαφορά μεγαλύτερη των 15 πόντων, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 10 γύρων X_i) θα πρέπει να είναι θετική. Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$P_1 = P(\text{Κερδίζει ο Γιώργος με διαφορά μεγαλύτερη των 15 πόντων}) = P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 15\right)$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i \sim N(10 \cdot 0.25, 10 \cdot 8) \equiv N(2.5, 80)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_1 , έχουμε:

$$\begin{aligned} P_1 &= P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 15\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 2.5}{\sqrt{80}} > \frac{15 - 2.5}{\sqrt{80}}\right) = 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 2.5}{\sqrt{80}} \leq \frac{15 - 2.5}{\sqrt{80}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{12.5}{\sqrt{80}}\right) = 1 - 0.9189 = 0.0811 \end{aligned}$$

- (ii) Για να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι στους 6 πρώτους γύρους είναι μπροστά στο σκορ κατά 5 πόντους, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 10 γύρων X_i) θα πρέπει να είναι θετική υπό την προϋπόθεση ότι στο τέλος των 6 πρώτων γύρων ήταν ίση με 5. Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$\begin{aligned}
 P_2 &= P(\text{Κερδίζει ο Γιώργος} \mid \text{στοις 6 πρώτους γύρους είναι μπροστά στο σκορ κατά 5 πόντους}) \\
 &= P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 0 \mid X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 5\right) \\
 &= P\left(X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + 5 > 0\right) \\
 &= P\left(X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} > -5\right)
 \end{aligned}$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} \sim N(4 \cdot 0.25, 4 \cdot 8) \equiv N(1, 32)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_2 , έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P_2 &= P\left(X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} > -5\right) \\
 &= P\left(\frac{X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} - 1}{\sqrt{32}} > \frac{-5 - 1}{\sqrt{32}}\right) \\
 &= 1 - P\left(\frac{X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} - 1}{\sqrt{32}} \leq \frac{-5 - 1}{\sqrt{32}}\right) \\
 &= 1 - \Phi\left(\frac{-6}{\sqrt{32}}\right) = 1 - 1 + \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{32}}\right) = \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{32}}\right) = 0.8556
 \end{aligned}$$

- (iii) Για να κερδίσει ο Νίκος δεδομένου ότι στο τέλος του 1-ου γύρου προηγείται με 5 πόντους, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 10 γύρων X_i) θα πρέπει να είναι αρνητική υπό την προϋπόθεση ότι στο τέλος του 1-ου γύρου ήταν ίση με -5 . Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$\begin{aligned}
 P_3 &= P(\text{Κερδίζει ο Νίκος,} \mid \text{στο τέλος του 1-ου γύρου προηγείται με 5 πόντους}) \\
 &= P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i < 0 \mid X_1 = -5\right) \\
 &= P\left(X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} - 5 < 0\right) \\
 &= P\left(X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} < 5\right)
 \end{aligned}$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} \sim N(9 \cdot 0.25, 9 \cdot 8) \equiv N(2.25, 72)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_3 , έχουμε:

$$\begin{aligned} P_3 &= P\left(X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} < 5\right) \\ &= P\left(\frac{X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} - 2.25}{\sqrt{72}} < \frac{5 - 2.25}{\sqrt{72}}\right) \\ &= P\left(\frac{X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} - 2.25}{\sqrt{72}} < \frac{2.75}{\sqrt{72}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{2.75}{\sqrt{72}}\right) = 0.6271 \end{aligned}$$

Θέμα 2.4

Ο Γιώργος και ο Νίκος, επιθυμώντας να κάνουν ένα διάλειμμα από την προετοιμασία τους για την τελική εξέταση του ΗΥ-217 αποφασίζουν να πάνε για σωματική άσκηση στο δημοτικό γήπεδο της πόλης (στέλνοντας πρώτα τον κατάλληλο κωδικό). Ο Κώστας, όντας περισσότερο αγχωμένος σχετικά με το διάβασμά του, αποφασίζει να μείνει στο σπίτι του, και σχεδιάζει ένα στατιστικό μοντέλο σχετικά με την "έξοδο" των φίλων του.

Πιο συγκεκριμένα, Ο Γιώργος και ο Νίκος θα τρέξουν συνολικά 12 γύρους, και σε κάθε γύρο η διαφορά (σε μέτρα) του Γιώργου από τον Νίκο είναι μία Κανονική Τ.Μ. με μέση τιμή $\mu = 0.125$ και διασπορά $\sigma^2 = 7$. Επίσης, το μοντέλο του Κώστα υποθέτει ότι:

- Οι διαφορές Γιώργου-Νίκου (σε μέτρα) κατά τους 12 γύρους είναι ανεξάρτητες Τ.Μ.
- Τελικός νικητής είναι εκείνος του οποίου οι "πόντοι" (αθροίζοντας τις επιμέρους διαφορές των γύρων) είναι περισσότεροι στο τέλος.
- 1 "πόντος" = διαφορά 1 μέτρου.

Στη συνέχεια, εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$.

- Ποια η πιθανότητα να κερδίσει ο Γιώργος με διαφορά μεγαλύτερη των 10 πόντων;
- Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι στους 3 πρώτους γύρους είναι μπροστά στο σκορ κατά 5 πόντους;
- Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος δεδομένου ότι στο τέλος του 6-ου γύρου προηγείται με 5 πόντους;

Λύση:

Έστω X_i η διαφορά των πόντων κάθε γύρου, μεταξύ του Γιώργου και του Νίκου ($i = 1, 2, \dots, 12$). Τότε, σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε ότι:

- $X_i \sim N(0.125, 7)$, $i = 1, 2, \dots, 12$
 - Οι X_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους Κανονικές Τ.Μ.
- (i) Για να κερδίσει ο Γιώργος με διαφορά μεγαλύτερη των 10 πόντων, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 12 γύρων X_i) θα πρέπει να είναι > 10 . Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$P_1 = P(\text{Κερδίζει ο Γιώργος με διαφορά μεγαλύτερη των 10 πόντων}) = P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i > 10\right)$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{12} X_i \sim N(12 \cdot 0.125, 12 \cdot 7) \equiv N(1.5, 84)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_1 , έχουμε:

$$\begin{aligned} P_1 &= P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i > 10\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{12} X_i - 1.5}{\sqrt{84}} > \frac{10 - 1.5}{\sqrt{84}}\right) = 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{12} X_i - 1.5}{\sqrt{84}} \leq \frac{10 - 1.5}{\sqrt{84}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{8.5}{\sqrt{84}}\right) = 1 - 0.8231 = 0.1769 \end{aligned}$$

- (ii) Για να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι στους 3 πρώτους γύρους είναι μπροστά στο σκορ κατά 5 πόντους, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 12 γύρων X_i) θα πρέπει να είναι θετική υπό την προϋπόθεση ότι στο τέλος των 3 πρώτων γύρων ήταν ίση με 5. Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P_2 &= P(\text{Κερδίζει ο Γιώργος} \mid \text{στοις 3 πρώτους γύρους είναι μπροστά στο σκορ κατά 5 πόντους}) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i > 0 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 5\right) \\ &= P\left(X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + 5 > 0\right) \\ &= P\left(X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} > -5\right) \end{aligned}$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} \sim N(9 \cdot 0.125, 9 \cdot 7) \equiv N(1.125, 72)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_2 , έχουμε:

$$\begin{aligned} P_2 &= P\left(X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} > -5\right) \\ &= P\left(\frac{X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} - 1.125}{\sqrt{72}} > \frac{-5 - 1.125}{\sqrt{72}}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} - 1.125}{\sqrt{72}} \leq \frac{-5 - 1.125}{\sqrt{72}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{-6.125}{\sqrt{72}}\right) = 1 - 1 + \Phi\left(\frac{6.125}{\sqrt{72}}\right) = \Phi\left(\frac{6.125}{\sqrt{72}}\right) = 0.7648 \end{aligned}$$

- (iii) Για να κερδίσει ο Νίκος δεδομένου ότι στο τέλος του 6-ου γύρου προηγείται με 5 πόντους, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 12 περιόδων X_i) θα πρέπει να είναι αρνητική υπό την προϋπόθεση ότι στο τέλος του 6-ου γύρου ήταν ίση με -5 . Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P_3 &= P(\text{Κερδίζει ο Νίκος,} \mid \text{στο τέλος του 6-ου γύρου προηγείται με 5 πόντους}) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i < 0 \mid X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = -5\right) \\ &= P\left(X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} - 5 < 0\right) = P\left(X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} < 5\right) \end{aligned}$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} \sim N(6 \cdot 0.125, 6 \cdot 7) \equiv N(0.75, 42)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_3 , έχουμε:

$$\begin{aligned} P_3 &= P\left(X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} < 5\right) \\ &= P\left(\frac{X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} - 0.75}{\sqrt{42}} < \frac{5 - 0.75}{\sqrt{42}}\right) \\ &= P\left(\frac{X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} - 0.75}{\sqrt{42}} < \frac{4.25}{\sqrt{42}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{4.25}{\sqrt{42}}\right) = 0.7440 \end{aligned}$$

Θέμα 2.5

Ο Γιώργος και ο Νίκος, επιθυμώντας να κάνουν ένα διάλειμμα από την προετοιμασία τους για την τελική εξέταση του ΗΥ-217 αποφασίζουν να πάνε για σωματική άσκηση στο δημοτικό γήπεδο της πόλης (στέλνοντας πρώτα τον κατάλληλο κωδικό). Ο Κώστας, όντας περισσότερο αγχωμένος σχετικά με το διάβασμά του, αποφασίζει να μείνει στο σπίτι του, και σχεδιάζει ένα στατιστικό μοντέλο σχετικά με την "έξοδο" των φίλων του.

Πιο συγκεκριμένα, Ο Γιώργος και ο Νίκος θα τρέξουν συνολικά 15 γύρους, και σε κάθε γύρο η διαφορά (σε μέτρα) του Γιώργου από τον Νίκο είναι μία Κανονική Τ.Μ. με μέση τιμή $\mu = 0.0625$ και διασπορά $\sigma^2 = 6$. Επίσης, το μοντέλο του Κώστα υποθέτει ότι:

- Οι διαφορές Γιώργου-Νίκου (σε μέτρα) κατά τους 15 γύρους είναι ανεξάρτητες Τ.Μ.
- Τελικός νικητής είναι εκείνος του οποίου οι "πόντοι" (αθροίζοντας τις επιμέρους διαφορές των γύρων) είναι περισσότεροι στο τέλος.
- 1 "πόντος" = διαφορά 1 μέτρου.

Στη συνέχεια, εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$.

- Ποια η πιθανότητα να κερδίσει ο Γιώργος με διαφορά μικρότερη των 7 πόντων;
- Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι μετά τους 5 πρώτους γύρους είναι πίσω στο σκορ κατά 9 πόντους;
- Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι στο τέλος του 9-ου γύρου προηγείται με 2 πόντους;

Λύση:

Έστω X_i η διαφορά των πόντων κάθε γύρου, μεταξύ του Γιώργου και του Νίκου ($i = 1, 2, \dots, 15$). Τότε, σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε ότι:

- $X_i \sim N(0.0625, 6)$, $i = 1, 2, \dots, 15$
 - Οι X_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους Κανονικές Τ.Μ.
- (i) Για να κερδίσει ο Γιώργος με διαφορά μικρότερη των 7 πόντων, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 15 γύρων X_i) θα πρέπει να είναι > 0 και < 7 . Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$P_1 = P(\text{Κερδίζει ο Γιώργος με διαφορά μικρότερη των 7 πόντων}) = P\left(0 < \sum_{i=1}^{15} X_i < 7\right)$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{15} X_i \sim N(15 \cdot 0.0625, 15 \cdot 6) \equiv N(0.9375, 90)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_1 , έχουμε:

$$\begin{aligned} P_1 &= P\left(0 < \sum_{i=1}^{15} X_i < 7\right) = P\left(\frac{0 - 0.9375}{\sqrt{90}} < \frac{\sum_{i=1}^{15} X_i - 0.9375}{\sqrt{90}} < \frac{7 - 0.9375}{\sqrt{90}}\right) \\ &= P\left(\frac{-0.9375}{\sqrt{90}} < \frac{\sum_{i=1}^{15} X_i - 0.9375}{\sqrt{90}} < \frac{6.0625}{\sqrt{90}}\right) = \Phi\left(\frac{6.0625}{\sqrt{90}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.9375}{\sqrt{90}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{6.0625}{\sqrt{90}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{-0.9375}{\sqrt{90}}\right) = 0.7386 - 1 + 0.5394 = 0.278 \end{aligned}$$

- (ii) Για να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι μετά τους 5 πρώτους γύρους είναι πίσω στο σκορ κατά 9 πόντους, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 15 γύρων X_i) θα πρέπει να είναι θετική υπό την προϋπόθεση ότι στο τέλος των 5 πρώτων γύρων ήταν ίση με -9 . Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P_2 &= P(\text{Κερδίζει ο Γιώργος} \mid \text{στους 5 πρώτους γύρους είναι πίσω στο σκορ κατά 9 πόντους}) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{15} X_i > 0 \mid X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = -9\right) \\ &= P\left(X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} - 9 > 0\right) \\ &= P\left(X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} > 9\right) \end{aligned}$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} \sim N(10 \cdot 0.0625, 10 \cdot 6) \equiv N(0.625, 60)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_2 , έχουμε:

$$\begin{aligned} P_2 &= P\left(X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} > 9\right) \\ &= P\left(\frac{X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} - 0.625}{\sqrt{60}} > \frac{9 - 0.625}{\sqrt{60}}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} - 0.625}{\sqrt{60}} \leq \frac{9 - 0.625}{\sqrt{60}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{8.375}{\sqrt{60}}\right) = 1 - 0.8602 = 0.1398 \end{aligned}$$

- (iii) Για να κερδίσει ο Γιώργος δεδομένου ότι στο τέλος του 9-ου γύρου προηγείται με 2 πόντους, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 15 γύρων X_i) θα πρέπει να είναι θετική υπό την προϋπόθεση ότι στο τέλος του 9-ου γύρου ήταν ίση με 2. Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P_3 &= P(\text{Κερδίζει ο Γιώργος} \mid \text{στο τέλος του 9-ου γύρου προηγείται με 2 πόντους}) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{15} X_i > 0 \mid X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 = 2\right) \\ &= P\left(X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + 2 > 0\right) \\ &= P\left(X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} > -2\right) \end{aligned}$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} \sim N(6 \cdot 0.0625, 6 \cdot 6) \equiv N(0.375, 36)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_3 , έχουμε:

$$\begin{aligned}
P_3 &= P\left(X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} > -2\right) \\
&= P\left(\frac{X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} - 0.375}{\sqrt{36}} > \frac{-2 - 0.375}{\sqrt{36}}\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} - 0.375}{\sqrt{36}} \leq \frac{-2 - 0.375}{\sqrt{36}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{-2.375}{\sqrt{36}}\right) = 1 - 1 + \Phi\left(\frac{2.375}{\sqrt{36}}\right) = \Phi\left(\frac{2.375}{\sqrt{36}}\right) = 0.6539
\end{aligned}$$