

16-11-2019

ΘΕΜΑ 1ο

Από το νόμο των De Morgan, έχουμε ότι:

$$P(A \cup (B^c \cup C^c)^c) = P(A \cup (B \cap C)).$$

(α) Καθώς B και C είναι ζεύγη μεταξύ τους $B \cap C = \emptyset$. Συνεπώς:

$$P(A \cup (B \cap C)) = P(A \cup \emptyset) = P(A) = 1/3.$$

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad P(A \cup (B \cap C)) &= P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= 2P(B \cap C) + P(B \cap C) - \frac{1}{2}P(B \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(γ)} \quad P(A \cup (B \cap C)) &= P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(B \cap \emptyset) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(\emptyset) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(δ)} \quad P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) &= 0.6 \Rightarrow P((A^c \cap (B^c \cup C^c))^c) = 1 - 0.6 \\ &\Rightarrow P(A \cup (B^c \cup C^c)) = 0.4 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2ο

(α) Το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 5 φύλλα από την τράπουλα είναι $\binom{52}{5}$. Δεδομένου του γυμνόλου (από τα 4), η κέντα χρώμα τεσσάρων φύλλων επιτυγχάνεται με 11 τρόπους:

A-2-3-4, 2-3-4-5, 3-4-5-6, ..., 8-9-10-J, 9-10-J-Q, 10-J-Q-K, J-Q-K-A.

Έχουμε 4 δυνατά γυμνόλα. Τέλος το πέμπτο χαρτί μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα 52-4 φύλλα.

Συνεπώς υπάρχουν $11 \cdot 4 \cdot 48$ τρόποι για να κάνουμε κέντα χρώμα 4-φ.

Η πιθανότητα είναι:
$$\frac{11 \cdot 4 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = \underline{\underline{0.0008126}}$$

(β) Το γεγονός "έστις 3 κηλές υπάρχων τουλάχιστον μία κίτρινη και μία πράσινη" συμβαίνει όταν "επιλέγω 1 κίτρινη, 1 πράσινη και μία άλλη χρώματος" ή όταν "επιλέγω 2 κίτρινες και μία πράσινη". Υπάρχουν συνολικά 9 κηλές και επομένως $\binom{9}{3}$ τρόποι να επιλέξω 3 από αυτές.

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{\binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{6}{1} + \binom{2}{2} \times \binom{1}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{12 + 1}{\binom{9}{3}} = 0.1548$$

ΘΕΜΑ 3ο Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

(α)
$$P(A) = P(S_1) \cdot P(A|S_1) + P(S_2) \cdot P(A|S_2) + P(S_3) \cdot P(A|S_3)$$

• Στην κατάσταση S_1 , η μηχανή δεν παράγει δύο 1 (παράγει το πολύ 1), επομένως $P(A|S_1) = 0$.

• Στην κατάσταση S_2 , η μηχανή παράγει συνολικά $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 1 + 4 + 6 = 11$ τετράηπιτες ακολουθίες που περιέχουν 0 ή 1 ή 2 άκρους, κάθε μία με πιθανότητα $1/11$. Επομένως $P(A|S_2) = 1/11$.

• Στην κατάσταση S_3 , η μηχανή παράγει συνολικά $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 1 + 4 + 6 + 4 = 15$ τετράηπιτες ακολουθίες που περιέχουν 0 ή 1 ή 2 ή 3 άκρους, κάθε μία με πιθανότητα $1/15$. Επομένως $P(A|S_3) = 1/15$.

$$\therefore P(A) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{11} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{15} = 0.0525$$

(β) Bayes:
$$P(S_2|A) = \frac{P(S_2) \cdot P(A|S_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{11}}{0.0525} = 0.5772$$

(α) Προφανώς από την εκφώνηση προκύπτει ότι η τ.λ. X ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n=5$, $p=\frac{3}{4}$:

$$X \sim \Delta(n=5, p=\frac{3}{4})$$

$$P_X(k) = \binom{5}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{5-k}; \quad k=0,1,2,3,4,5.$$

$$E[X] = np = 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3.75$$

$$\text{var}(X) = np(1-p) = 5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{16} = 0.9375.$$

(β) Στα 5 δευτερόλεπτα, το ρομπότ κινείται X βήματα προς τα δεξιά και επομένως X βήματα προς τα δεξιά και $(5-X)$ βήματα και βήματα προς τα αριστερά. Συνεπώς,

$$Y = X - (5-X) = 2X - 5.$$

Η Y παίρνει τις τιμές $\{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$ όταν

η X παίρνει τις τιμές $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, ή

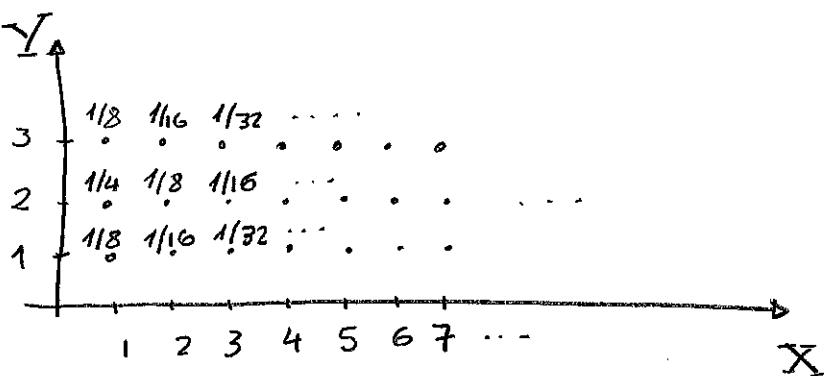
η πιθανότητες: $P(Y=2k-5) = P(X=k) = \binom{5}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{5-k};$

$$k=0,1,2,3,4,5.$$

$$E[Y] = E[2X-5] = 2E[X] - 5 = 2 \cdot 3.75 - 5 = 2.5$$

$$\text{var}(Y) = \text{var}(2X-5) = 4 \text{var}(X) = 4 \cdot 0.9375 = 3.75$$

(α)



Είναι: $0 < P_{X,Y}(x,y) < 1 \quad \forall (x,y)$

$$\bullet \sum_{x=1}^{+\infty} \sum_{y=1}^3 P_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\left[\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a} ; |a| < 1 \right] = \frac{1}{4} \frac{1/2}{1-1/2} + \frac{1}{2} \frac{1/2}{1-1/2} + \frac{1}{4} \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

Συνεπώς η $P_{X,Y}(x,y)$ είναι μία έγκυρη β.π.

$$(β) \bullet P_X(x) = \sum_{y=1}^3 P_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x ; x=1,2,3,\dots$$

$$\bullet P_Y(y) = \sum_{x=1}^{+\infty} P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4} \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{4} & ; y=1,3 \\ \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2} \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{2} & ; y=2 \end{cases}$$

Πάραυτα ότι $P_{X,Y}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$, συνεπώς X, Y : ανεξάρτητες.

$$(γ) \quad P_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{2} ; x=1,2,3,\dots$$

Αναγνωρίζουμε την τ.μ. X ως Γεωμετρική με παράμετρο $p = \frac{1}{2}$:

$$X \sim \text{Geo}(p = \frac{1}{2}).$$

$$\text{Συνεπώς} \quad E[X] = \frac{1}{p} = 2 \quad \text{και} \quad \text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-1/2}{1/4} = 2.$$

$$(δ) \quad E[Z] = E[3X - Y^2] = 3E[X] - E[Y^2]$$

$$\text{var}(Z) = \text{var}(3X - Y^2) = \text{var}(3X) + \text{var}(-Y^2) \quad (X, Y: \text{ανεξάρτητες})$$

$$\therefore \text{var}(Z) = 9 \text{var}(X) + \text{var}(Y^2)$$

$$\therefore \text{var}(Z) = 9 \text{var}(X) + E[Y^4] - E^2[Y^2]$$

Τώρα, $E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$$E[Y^2] = 1^2 \frac{1}{4} + 3^2 \frac{1}{4} + 2^2 \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$E[Y^4] = 1^4 \frac{1}{4} + 3^4 \frac{1}{4} + 2^4 \frac{1}{2} = \frac{57}{2}$$

Επομένως,

$$E[Z] = 3 \cdot 2 - \frac{9}{2} = 1.5$$

$$\text{var}(Z) = 9 \cdot 2 + \frac{57}{2} - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 26.25$$

(ε)

$$P_{Z/X}(z/z=2) = P(Z=z|X=1) = P(3X-Y^2=z|X=1)$$

$$= P(3-Y^2=z) = \begin{cases} \frac{1}{4} & z=2, -6 \\ \frac{1}{2} & z=-1 \end{cases}$$

καθώς η τ.κ. Y παίρνει τις τιμές 1, 3, 2 με π.δ. $1/4, 1/4, 1/2$

αντίστοιχα.

□.