

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
16 Νοεμβρίου 2019 - Διάρκεια: 2.5 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Βασικές Έννοιες

Έστω A , B , και C τρία γεγονότα ορισμένα στο δειγματοχώρο Ω ενός πειράματος τύχης. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(A \cup (B^c \cup C^c)^c)$ σε κάθε μια από τις 4 ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) Τα A , B και C είναι ξένα μεταξύ τους γεγονότα και $P(A) = 1/3$.

(β) $P(A) = 2P(B \cap C) = 4P(A \cap B \cap C) = 1/2$.

(γ) $P(A) = 1/2$, $P(B \cap C) = 1/3$, και $P(A \cap C) = 0$.

(δ) $P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) = 0.6$.

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Συνδυαστική

(α) Μια τράπουλα περιέχει συνολικά 52 φύλλα που είναι χωρισμένα σε 4 σύμβολα (κούπα, καρό, μπαστούνι, σπαθί) και καθένα από αυτά έχει 13 φύλλα στην σειρά (Άσσος-2-3-...-10-J-Q-K).

Στην 5 Card Stud παραλλαγή του πόκερ ο παίκτης λαμβάνει 5 φύλλα. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο παίκτης να κάνει *κέντα χρώμα τεσσάρων φύλλων* (four-card straight flush). Δηλαδή στα 5 φύλλα που θα λάβει τα τέσσερα να είναι συνεχόμενα του ίδιου συμβόλου, π.χ. 4-5-6-7 κούπα ή 9-10-J-Q σπαθί. Ο Άσσος μπορεί να "κολλήσει" είτε ως πρώτο φύλλο χαμηλά (π.χ. Άσσος-2-3-4 μπαστούνι) είτε ως τελευταίο φύλλο ψηλά (π.χ. J-Q-K-Άσσος καρό).

(β) Ένα κουτί περιέχει 3 μπλε, 2 κίτρινες, 3 κόκκινες και 1 πράσινη μπάλες. Επιλέγετε τυχαία 3 μπάλες. Με ποια πιθανότητα θα έχετε τουλάχιστον 1 κίτρινη και 1 πράσινη μπάλα;

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας και Bayes

Μια πηγή μηνυμάτων η οποία παράγει ακολουθίες τεσσάρων bits βρίσκεται σε μία από τις 3 δυνατές καταστάσεις, S_1 , S_2 , και S_3 , με ίση πιθανότητα. Στην κατάσταση S_k , η πηγή παράγει τετράμπιτες ακολουθίες που περιέχουν *πολύ k άσσους*, κάθε μία από αυτές με την ίδια πιθανότητα. Δηλαδή, στην κατάσταση S_1 η πηγή παράγει τα μηνύματα 0000, 1000, 0100, 0010, 0001 με την ίδια πιθανότητα $1/5$.

Έστω A το γεγονός ότι η πηγή παράγει το μήνυμα 0110.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(A)$.

(β) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η πηγή βρίσκεται στην κατάσταση S_2 δεδομένου ότι παράχθηκε το μήνυμα 0110.

Θέμα 4 - 20 μονάδες. Δοκιμές Bernoulli

Ένα ρομπότ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και αρχίζει να κινείται κατά μήκος του άξονα των x , κάνοντας ένα βήμα κάθε δευτερόλεπτο. Σε κάθε του βήμα μετακινείται προς τα δεξιά κατά 1 μέτρο με πιθανότητα $3/4$ ή προς τα αριστερά κατά 1 μέτρο με πιθανότητα $1/4$, ανεξάρτητα από βήμα σε βήμα.

(α) Έστω η τ.μ. X , το πλήθος των βημάτων προς τα δεξιά που μετακινείται το ρομπότ στη διάρκεια 5 δευτερόλεπτων. Υπολογίστε την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X , τη μέση τιμή, $E[X]$, και τη διασπορά $var(X)$.

(β) Έστω η τ.μ. Y , η θέση (σε μέτρα) του ρομπότ στον άξονα των x μετά από 5 δευτερόλεπτα. Υπολογίστε την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y , τη μέση τιμή, $E[Y]$, και τη διασπορά $var(Y)$.

Θέμα 5 - 20 μονάδες. Από κοινού κατανομές

Θεωρείστε την ακόλουθη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) των τ.μ. X και Y :

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x & y = 1, 3; \quad x = 1, 2, 3, \dots \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^x & y = 2; \quad x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της $p_{X,Y}(x,y)$. Δείξτε ότι η $p_{X,Y}(x,y)$ είναι μία έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας.

(β) Υπολογίστε τις περιθωριακές σ.π. $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y , αντίστοιχα. Είναι οι X και Y ανεξάρτητες;

(γ) Αναγνωρίστε την κατανομή της τ.μ. X και την παράμετρο αυτής. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[X]$, και τη διασπορά της, $var(X)$.

(δ) Έστω $Z = 3X - Y^2$. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[Z]$, και τη διασπορά, $var(Z)$, της Z .

(ε) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. $p_{Z|X}(z|x=2)$.