

Άσκηση 1

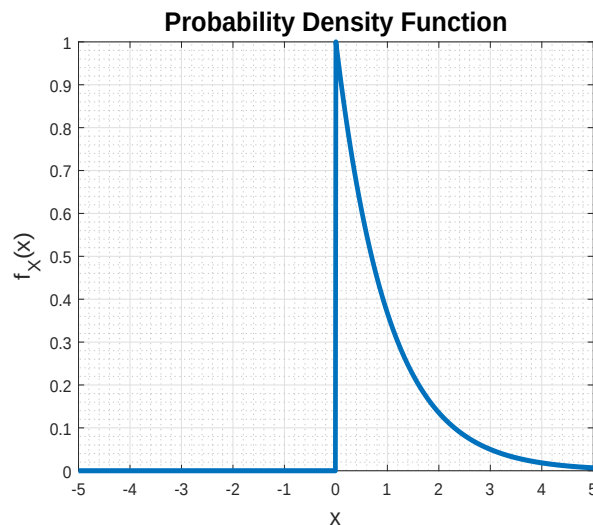
Έστω ότι η διάρκεια ζωής σε χρόνια μίας οθόνης Η/Υ μοντελοποιείται ως μία συνεχής Τ.Μ. X , με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας PDF που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

- (i) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.
- (ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(1 \leq X \leq 2)$.
- (iv) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (v) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \geq 1)$.

Λύση

- (i) Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

- (ii) Η $f_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f_X(x)dx + \int_0^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -\left[e^{-x}\right]_0^{+\infty} = -(0 - 1) = 1 \end{aligned}$$

- (iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f_X(x) dx = \int_1^2 e^{-x} dx = -\left[e^{-x}\right]_1^2 = e^{-1} - e^{-2}$$

- (iv) Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$

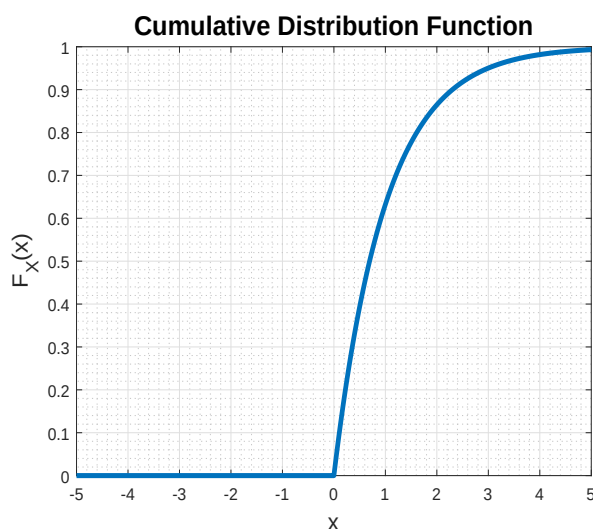
(b) Για $x \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t) dt + \int_0^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x e^{-t} dt \\ &= \int_0^x e^{-t} dt = -\left[e^{-t}\right]_0^x = -(e^{-x} - e^0) = 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $F_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής $F_X(x)$.

- (v) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(X \geq 1) = \int_1^{+\infty} f_X(x) dx = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -\left[e^{-x}\right]_1^{+\infty} = e^{-1}$$

Άσκηση 2

Έστω συνεχής Τ.Μ. X , με Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$F_X(x) = \begin{cases} c - \frac{4}{x^2} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

, όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστούν:

- (i) Η σταθερά c .
- (ii) Η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) της Τ.Μ. X , $f_X(x)$.
- (iii) Η μέση τιμή της Τ.Μ. X , $E[X]$.

Λύση

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που δίνεται η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής μίας Τ.Μ. X , και όχι η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας αυτής, η Συνθήκη Κανονικοποίησης λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \end{cases}$$

- (i) Σύμφωνα με την θεωρία, θα πρέπει να ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης. Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(c - \frac{4}{x^2} \right) = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$$

Άρα, τελικά, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF) θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{x^2} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

- (ii) Με γνωστή την Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

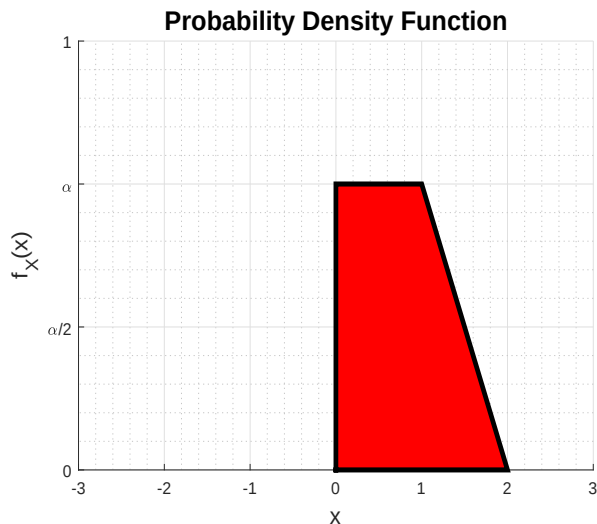
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

- (iii) Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_2^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_2^{+\infty} x \cdot \left(\frac{8}{x^3} \right) dx \\ &= \int_2^{+\infty} \frac{8}{x^2} dx = 8 \left[-\frac{1}{x} \right]_2^{+\infty} = 8 \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Έστω συνεχής Τ.Μ. X , με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) η γραφική παράσταση της οποίας (περιορισμένη στο διάστημα $[-3, 3]$) φαίνεται στο Σχήμα 3 (όπου α σταθερά με $\alpha \in \mathbb{R}$).



Σχήμα 3: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

Να υπολογιστούν:

- (i) Η σταθερά α .
- (ii) Η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$.
- (iii) Η μέση τιμή της Τ.Μ. X , $E[X]$.
- (iv) Η διασπορά της Τ.Μ. X , $VAR[X]$.

Λύση

- (i) Αρχικά, προσδιορίζουμε τον τύπο της Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, με βάση το Σχήμα 4. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha & 0 \leq x \leq 1 \\ c \cdot x + d & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η $f_X(x)$, εκτός από την προσδιοριστέα σταθερά α , εκφράζεται επιπλέον συναρτήσει των παραμέτρων c, d . Ως εκ τούτου, οι παράμετροι c, d θα πρέπει να εκφραστούν συναρτήσει της σταθεράς α , με βάση του τύπο της $f_X(x)$.

Με βάση το Σχήμα 3, παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} f_X(1) = \alpha \Rightarrow c + d = \alpha \\ f_X(2) = 0 \Rightarrow 2 \cdot c + d = 0 \end{cases}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τα c, d , βρίσκουμε ότι:

$$\begin{cases} c = -\alpha \\ d = 2\alpha \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τα c , d , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha & 0 \leq x \leq 1 \\ -\alpha x + 2\alpha & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

Για να είναι η $f_X(x)$ είναι μία *έγκυρη* Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 f_X(x)dx + \int_0^1 f_X(x)dx + \int_1^2 f_X(x)dx + \int_2^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^1 \alpha dx + \int_1^2 (-\alpha x + 2\alpha)dx + \int_2^{+\infty} 0dx &= 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \left[x \right]_0^1 - \alpha \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + 2\alpha \cdot \left[x \right]_1^2 = 1 \\ \Leftrightarrow \alpha \cdot (1 - 0) - \alpha \cdot (2 - \frac{1}{2}) + 2\alpha \cdot (2 - 1) &= 1 \Leftrightarrow \alpha - \frac{3\alpha}{2} + 2\alpha = 1 \Leftrightarrow 3\alpha - \frac{3\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η προσδιοριστέα σταθερά α θα μπορούσε να υπολογιστεί εναλλακτικά, απαιτώντας το εμβαδόν μεταξύ της $f_X(x)$ και του άξονα $x'x$ να ισούται με 1:

$$E_{\text{Τραπεζίου}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(2+1) \cdot \alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

- (ii) Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$

(b) Για $0 \leq x < 1 \Leftrightarrow$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x \frac{2}{3}dt = \int_0^x \frac{2}{3}dt = \frac{2}{3} \left[t \right]_0^x = \frac{2x}{3}$$

(c) Για $1 \leq x < 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 \frac{2}{3}dt + \int_1^x \left(-\frac{2}{3}t + \frac{4}{3} \right)dt = \int_0^1 \frac{2}{3}dt + \int_1^x \left(-\frac{2}{3}t + \frac{4}{3} \right)dt \\ &= \frac{2}{3} \left[t \right]_0^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^x + \frac{4}{3} \left[t \right]_1^x = \frac{2}{3}(1-0) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{4}{3}(x-1) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4x}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{x^2}{3} + \frac{4x}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(-x^2 + 4x - 1) = -\frac{1}{3}(x^2 - 4x + 1) \end{aligned}$$

(d) Για $x \geq 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 \frac{2}{3}dt + \int_1^2 \left(-\frac{2}{3}t + \frac{4}{3}\right)dt + \int_2^x 0dt = \int_0^1 \frac{2}{3}dt + \int_1^2 \left(-\frac{2}{3}t + \frac{4}{3}\right)dt \\ &= \frac{2}{3} \left[t \right]_0^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^2 + \frac{4}{3} \left[t \right]_1^2 = \frac{2}{3}(1-0) - \frac{2}{3}(2-\frac{1}{2}) + \frac{4}{3}(2-1) = \frac{2}{3} - 1 + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2x}{3} & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{3}(x^2 - 4x + 1) & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

(iii) Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0dx + \int_0^1 x \cdot \frac{2}{3}dx + \int_1^2 x \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right)dx + \int_2^{+\infty} x \cdot 0dx \\ &= \int_0^1 x \cdot \frac{2}{3}dx + \int_1^2 x \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right)dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x dx + \int_1^2 \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\right)dx \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + \frac{4}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - 0) - \frac{2}{3}(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}) + \frac{4}{3}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{3} - \frac{14}{9} + 2 = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

(iv) Για τον υπολογισμό της διασποράς της Τ.Μ. X , $VAR[X]$, θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή από την θεωρία σχέση:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Για τον υπολογισμό της ροπής 2^{ας} τάξεως, $E[X^2]$, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0dx + \int_0^1 x^2 \cdot \frac{2}{3}dx + \int_1^2 x^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right)dx + \int_2^{+\infty} x^2 \cdot 0dx \\ &= \int_0^1 x^2 \cdot \frac{2}{3}dx + \int_1^2 x^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right)dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x^2 dx + \int_1^2 \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2\right)dx \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 + \frac{4}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2}{3}(\frac{1}{3} - 0) - \frac{2}{3}(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}) + \frac{4}{3}(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{2}{9} - \frac{30}{12} + \frac{28}{9} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Άρα, η διασπορά της Τ.Μ. X , $VAR[X]$ θα είναι τελικά:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{5}{6} - \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{5}{6} - \frac{49}{81} = \frac{111}{486} = \frac{37}{162}$$

Άσκηση 4

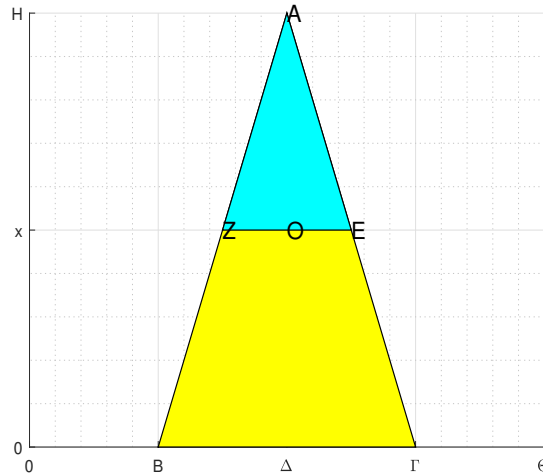
Θεωρείστε ένα τρίγωνο με ύψος H . Έστω ότι X είναι η απόσταση από τη βάση μέχρι ένα σημείο το οποίο επιλέγεται μέσα στο τρίγωνο σύμφωνα με έναν ομοιόμορφο νόμο πιθανότητας. Να υπολογιστούν:

(i) Η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$.

(ii) Η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF), $f_X(x)$.

Λύση

Έστω $AB\Gamma$ το δοσμένο τρίγωνο, που φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Υπολογισμός Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής $F_X(x)$.

- Η βάση του τριγώνου $AB\Gamma$ έχει μήκος $(B\Gamma)$
- Το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με H
- Ως εκ τούτου, το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ θα είναι:

$$E_{AB\Gamma} = \frac{(B\Gamma) \cdot H}{2}$$

- (i) Από το τυχαία επιλεγμένο σημείο (έστω O) σε ύψος x , φέρνουμε παράλληλη ευθεία προς τη βάση του τριγώνου $AB\Gamma$, και έστω AZE το τρίγωνο που δημιουργείται ως εκ τούτου (και φαίνεται στο Σχήμα 4).

- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και AZE είναι όμοια ($\angle A$ κοινή και $\angle B = \angle Z / \angle A$ κοινή και $\frac{(AZ)}{(AB)} = \frac{(AE)}{(A\Gamma)}$), άρα η βάση του AZE έχει μήκος που θα δίνεται από την σχέση:

$$\frac{(B\Gamma)}{(ZE)} = \frac{H}{H-x} \Rightarrow (ZE) = \frac{(B\Gamma) \cdot (H-x)}{H}$$

- Το ύψος του τριγώνου AZE είναι ίσο με $H-x$
- Ως εκ τούτου, το εμβαδόν του τριγώνου AZE θα είναι:

$$E_{AZE} = \frac{\frac{(B\Gamma) \cdot (H-x)}{H} \cdot (H-x)}{2} = \frac{(B\Gamma) \cdot (H-x)^2}{2H}$$

(a) Για $x < 0 \Rightarrow F_X(x) = 0$

(b) Για $0 \leq x \leq H \Rightarrow F_X(x) = 1 - P(X > x) = 1 - \frac{E_{AZE}}{E_{AB\Gamma}} = 1 - \frac{\frac{(B\Gamma) \cdot (H-x)^2}{2H}}{\frac{(B\Gamma) \cdot H}{2}} = 1 - \left(\frac{H-x}{H}\right)^2$

(c) Για $x > H \Rightarrow F_X(x) = 1$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \left(\frac{H-x}{H}\right)^2 & 0 \leq x \leq H \\ 1 & x > H \end{cases}$$

- (ii) Με γνωστή την Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2(H-x)}{H^2} & 0 \leq x \leq H \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άσκηση 5

Έστω συνεχής Τ.Μ. X , η οποία ακολουθεί την Εκθετική Κατανομή με $E[X] = 1$.

- (i) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$.
- (ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X < 1)$.
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \geq 1)$.
- (iv) Αν ισχύει η σχέση $P(X > c) = 0.95$, όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί η σταθερά c .

Λύση

- (i) Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Εκθετική Κατανομή, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Επίσης, είναι γνωστό πως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Εκθετική Κατανομή, η μέση τιμή της δίνεται από τον τύπο:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $E[X] = 1$ από την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$E[X] = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$

(b) Για $x \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t)dt + \int_0^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt + \int_0^x e^{-t}dt \\ &= \int_0^x e^{-t}dt = -\left[e^{-t}\right]_0^x = -(e^{-x} - e^0) = 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

(ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε :

$$P(X < 1) = \int_{-\infty}^1 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^1 e^{-x}dx = \int_0^1 e^{-x}dx = -\left[e^{-x}\right]_0^1 = -(e^{-1} - e^0) = 1 - e^{-1}$$

(iii) Εκμεταλλευόμενοι βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων, έχουμε :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - (1 - e^{-1}) = 1 - 1 + e^{-1} = e^{-1}$$

(iv) Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, έχουμε :

$$\begin{aligned} P(X > c) &= 0.95 \Rightarrow \int_c^{+\infty} f_X(x)dx = 0.95 \Rightarrow \int_c^{+\infty} e^{-x}dx = 0.95 \\ &\Rightarrow -\left[e^{-x}\right]_c^{+\infty} = 0.95 \Rightarrow -(0 - e^{-c}) = 0.95 \Rightarrow e^{-c} = 0.95 \\ &\Rightarrow -c = \ln(0.95) \Rightarrow c = -\ln(0.95) \Rightarrow c = -(-0.0513) \Rightarrow c = 0.0513 \end{aligned}$$

Άσκηση 6

Έστω X συνεχής Τ.Μ. με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

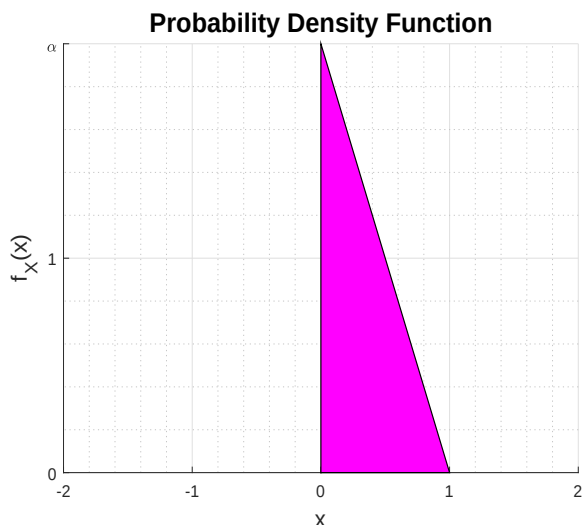
$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

, όπου α σταθερά με $\alpha \in \mathbb{R}$

- (i) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.
- (ii) Να υπολογιστεί η σταθερά α .
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(6X^2 > 5X - 1)$.
- (iv) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$.

Λύση

- (i) Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-2, 2]$) που φαίνεται στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

- (ii) Για να είναι η $f_X(x)$ είναι μία *έγκυρη* Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx + \int_0^1 f_X(x) dx + \int_1^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 \alpha(1-x) dx + \int_1^{+\infty} 0 dx &= 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \alpha(1-x) dx = 1 \Leftrightarrow \alpha \left(\left[x \right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right) = 1 \\ \Leftrightarrow \alpha \left[\left(1 - 0 \right) - \left(\frac{1}{2} - 0 \right) \right] &= 1 \Leftrightarrow \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2} \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η προσδιοριστέα σταθερά α θα μπορούσε να υπολογιστεί εναλλακτικά, απαιτώντας το εμβαδόν μεταξύ της $f_X(x)$ και του άξονα x' να ισούται με 1:

$$E_{\text{Τριγώνου}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1 \cdot \alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(6X^2 > 5X - 1) &= P(6X^2 - 5X + 1 > 0) = P\left[6\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0\right] \\
&= P\left(X > 1/3 \cap X > 1/2\right) + P\left(X < 1/3 \cap X < 1/2\right) = P(X > 1/2) + P(X < 1/3) \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 f_X(x)dx + \int_0^{\frac{1}{3}} f_X(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 2(1-x)dx + \int_0^{\frac{1}{3}} 2(1-x)dx \\
&= 2\left(\left[x\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1\right) + 2\left(\left[x\right]_0^{\frac{1}{3}} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{3}}\right) = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)\right] + 2\left[\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{18} - 0\right)\right] \\
&= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{18}\right) = 2\left(\frac{1}{8}\right) + 2\left(\frac{5}{18}\right) = \frac{1}{4} + \frac{5}{9} = \frac{29}{36}
\end{aligned}$$

- (iv) Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$

(b) Για $0 \leq x < 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t)dt + \int_0^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x 2(1-t)dt = \int_0^x 2(1-t)dt \\
&= 2\left(\left[t\right]_0^x - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x\right) = 2\left[\left(x - 0\right) - \left(\frac{x^2}{2} - 0\right)\right] = 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = -x^2 + 2x
\end{aligned}$$

(c) Για $x \geq 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t)dt + \int_0^1 f_X(t)dt + \int_1^{+\infty} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 2(1-t)dt + \int_1^{+\infty} 0dt \\
&= \int_0^1 2(1-t)dt = 2\left(\left[t\right]_0^1 - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1\right) = 2\left[\left(1 - 0\right) - \left(\frac{1}{2} - 0\right)\right] = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1
\end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -x^2 + 2x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Άσκηση 7

Θεωρείστε 2 Τ.Μ. Y και Z , και μία Τ.Μ. X η οποία είναι ίση με την Y με πιθανότητα p και με την Z με πιθανότητα $1 - p$.

- (i) Να αποδείξετε ότι η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) της Τ.Μ. X , $f_X(x)$, δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = pf_Y(x) + (1 - p)f_Z(x)$$

- (ii) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$, της δίπλευρης εκθετικής Τ.Μ., η οποία έχει ΣΠΠ που δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} p\lambda e^{\lambda x} & x < 0 \\ (1-p)\lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Λύση

- (i) Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, έχουμε:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = pP(Y \leq x) + (1-p)P(Z \leq x) = pF_Y(x) + (1-p)F_Z(x)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς x , λαμβάνουμε την $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = p \frac{dF_Y(x)}{dx} + (1-p) \frac{dF_Z(x)}{dx} = pf_Y(x) + (1-p)f_Z(x)$$

- (ii) Έστω οι Τ.Μ. Y και Z , οι οποίες έχουν ΣΠΠ που δίνονται (αντίστοιχα) από τους εξής τύπους:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda y} & y < 0 \\ 0 & y \geq 0 \end{cases} \quad f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \lambda e^{-\lambda z} & z \geq 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι Τ.Μ. $-Y$ και Z ακολουθούν εκθετική κατανομή. Χρησιμοποιώντας την Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$, της εκθετικής Τ.Μ., λαμβάνουμε την (CDF) των Y και Z (αντίστοιχα) από τους εξής τύπους:

$$F_Y(y) = \begin{cases} e^{\lambda y} & y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases} \quad F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - e^{-\lambda z} & z \geq 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η σχέση:

$$f_X(x) = pf_Y(x) + (1-p)f_Z(x) \Rightarrow F_X(x) = pF_Y(x) + (1-p)F_Z(x)$$

Άρα, τελικά, έχουμε:

$$F_X(x) = \begin{cases} pe^{\lambda x} & x < 0 \\ p + (1-p)(1 - e^{-\lambda x}) & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} pe^{\lambda x} & x < 0 \\ 1 - (1-p)e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$