

Άσκηση 1

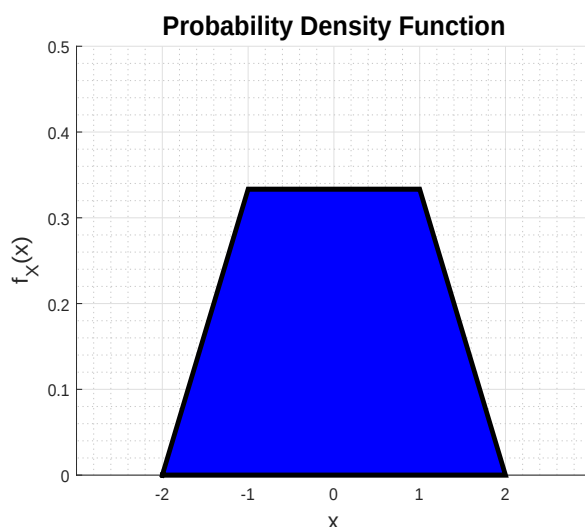
Έστω X συνεχής Τ.Μ. με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \frac{1}{3}(x+2) & -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{3} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}(-x+2) & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

- (i) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.
- (ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2)$.
- (iv) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \mid 0 \leq X \leq 2)$.

Λύση

- (i) Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-2, 2]$) που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

- (ii) Η $f_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{-2} f_X(x)dx + \int_{-2}^2 f_X(x)dx + \int_2^{+\infty} f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^2 f_X(x)dx + \int_2^{+\infty} 0dx = \int_{-2}^2 f_X(x)dx = \frac{(4+2) \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{6 \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

, όπου το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$ υπολογίστηκε ως το εμβαδόν μεταξύ του γραμμοσκιασμένου τραπεζίου στο Σχήμα 1 και του άξονα x'x. Εναλλακτικά, θα μπορούσε να υπολογιστεί με χρήση τεχνικών ολοκλήρωσης ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{-2} f_X(x)dx + \int_{-2}^{-1} f_X(x)dx + \int_{-1}^1 f_X(x)dx + \int_1^2 f_X(x)dx + \int_2^{+\infty} f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(x+2)dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx + \int_2^{+\infty} 0dx \\ &= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(x+2)dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{-1} + \frac{2}{3} \left[x \right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{3} \left[x \right]_{-1}^1 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \frac{2}{3} \left[x \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) + \frac{2}{3} (-1 + 2) + \frac{1}{3} (1 + 1) - \frac{1}{3} \left(2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} (2 - 1) \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{2} \right) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{6}{3} - \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

- (iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2\right) &= \int_{\frac{3}{2}}^2 f_X(x)dx = \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx = -\frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{2}{3} \left[x \right]_{\frac{3}{2}}^2 \\ &= -\frac{1}{3} \left(2 - \frac{9}{8} \right) + \frac{2}{3} \left(2 - \frac{3}{2} \right) = -\frac{1}{3} \left(\frac{7}{8} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{7}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

- (iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \mid 0 \leq X \leq 2\right) &= \frac{P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2, 0 \leq X \leq 2\right)}{P(0 \leq X \leq 2)} = \frac{P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2\right)}{P(0 \leq X \leq 2)} = \frac{\int_{\frac{3}{2}}^2 f_X(x)dx}{\int_0^2 f_X(x)dx} \\ &= \frac{\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx}{\int_0^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx} = \frac{-\frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{2}{3} \left[x \right]_{\frac{3}{2}}^2}{\frac{1}{3} \left[x \right]_0^1 + \left(-\frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \frac{2}{3} \left[x \right]_1^2 \right)} = \frac{-\frac{7}{24} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Ένας μεγιστάνας θα ζήσει ακόμα ένα χρονικό διάστημα σε έτη, το οποίο μοντελοποιείται ως μία συνεχής T.M. X με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας PDF που δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$f_X(x) = \begin{cases} -2x + 2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ο μεγιστάνας παντρεύεται μια νεαρή ηθοποιό, και συνάπτουν προγαμιαίο συμβόλαιο που προβλέπει πως όταν αυτός πεθάνει η ηθοποιός θα εισπράξει κληρονομιά (σε εκατομμύρια ευρώ) που μοντελοποιείται ως T.M. Y που δίνεται από τον εξής τύπο :

$$Y = 10 \cdot X + 2$$

- (i) Να υπολογιστεί το μέσο διάστημα ζωής που απομένει ακόμα στον μεγιστάνα πριν πεθάνει.
- (ii) Να υπολογιστεί η διασπορά της T.M. X , $VAR[X]$.
- (iii) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της κληρονομιάς (σε εκατομμύρια ευρώ) που θα εισπράξει η ηθοποιός, όταν ο μεγιστάνας πεθάνει.

Λύση

- (i) Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, ζητείται να υπολογιστεί η μέση τιμή της T.M. X , $E[X]$. Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot (-2x + 2) dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx \\ &= -2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[x^2 \right]_0^1 = -2 \left(\frac{1}{3} - 0 \right) + (1 - 0) = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- (ii) Για τον υπολογισμό της διασποράς της T.M. X , $VAR[X]$, θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή από τη θεωρία σχέση :

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Για τον υπολογισμό της ροπής 2^{ας} τάξεως, $E[X^2]$, έχουμε :

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot (-2x + 2) dx = \int_0^1 (-2x^3 + 2x^2) dx \\ &= -2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -2 \left(\frac{1}{4} - 0 \right) + 2 \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Άρα, η διασπορά της T.M. X , $VAR[X]$ θα είναι τελικά :

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

- (iii) Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, ζητείται να υπολογιστεί η μέση τιμή της T.M. Y , $E[Y]$. Εκμεταλλευόμενοι την γραμμική σχέση που συνδέει τις T.M. X και Y (και κάνοντας χρήση της αντίστοιχης ιδιότητας), έχουμε :

$$E[Y] = E[10 \cdot X + 2] = 10 \cdot E[X] + 2 = 10 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{16}{3} \approx 5.333$$

Άσκηση 3

Έστω συνεχής Τ.Μ. X , με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

, όπου λ είναι θετική σταθερά.

- (i) Να αποδείξετε ότι ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$.
- (ii) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της Τ.Μ. X , $E[X]$.
- (iii) Να υπολογιστεί η διασπορά της Τ.Μ. X , $VAR[X]$.

Λύση

- (i) Η $f_X(x)$ είναι μία *έγκυρη* Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx + \int_0^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^0 \lambda e^{\lambda x} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[e^{\lambda x} \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2} \cdot \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \cdot (1 - 0) + \frac{1}{2} \cdot (-0 + 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

- (ii) Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f_X(x) dx + \int_0^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx + \int_0^{+\infty} x \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 x \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} dx + \int_0^{+\infty} x \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^0 x \lambda e^{\lambda x} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left[x e^{\lambda x} \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^{\lambda x} dx \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(0 - 0 - \left[\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \right]_{-\infty}^0 \right) + \frac{1}{2} \left(-0 + 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\lambda} + 0 \right) + \frac{1}{2} \left(-0 + \frac{1}{\lambda} \right) = -\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} = 0 \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η $f_X(x)$ είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων, οπότε αναμέναμε ότι θα ισχύει $E[X] = 0$.

- (iii) Για τον υπολογισμό της διασποράς της Τ.Μ. X , $VAR[X]$, θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή από τη θεωρία σχέση:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Για τον υπολογισμό της ροπής 2^{ας} τάξεως, $E[X^2]$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 f_X(x) dx + \int_0^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \\
&= \int_{-\infty}^0 x^2 \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx + \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx = \int_{-\infty}^0 x^2 \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} dx + \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} dx = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^0 x^2 \lambda e^{\lambda x} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\left[x^2 e^{\lambda x} \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 2x e^{\lambda x} dx \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\left[-x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(0 - 0 - 2 \int_{-\infty}^0 x e^{\lambda x} dx \right) + \frac{1}{2} \left(-0 + 0 + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\lambda} \int_{-\infty}^0 x \lambda e^{\lambda x} dx \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \right) = -\frac{1}{\lambda} \left(-\frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Για τον υπολογισμό των 2 τελευταίων ολοκληρωμάτων χρησιμοποιήθηκε το αποτέλεσμα που προέκυψε από το προηγούμενο ερώτημα:

- $\int_{-\infty}^0 x \lambda e^{\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda}$
- $\int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$

Άρα, η διασπορά της T.M. X , $VAR[X]$ θα είναι τελικά:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - 0^2 = \frac{2}{\lambda^2}$$

Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή μίας συνεχούς τυχαιάς μεταβλητής ικανοποιεί την σχέση:

$$E[X] = \int_0^{+\infty} P(X > x) dx - \int_0^{+\infty} P(X < -x) dx$$

Λύση

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} P(X > x) dx &= \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} f_X(y) dy \right) dx = \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y f_X(y) dx \right) dy = \\
&= \int_0^{+\infty} f_X(y) dy \left(\int_0^y 1 dx \right) = \\
&= \int_0^{+\infty} y f_X(y) dy
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Για την δεύτερη ισότητα, αντιστρέψαμε την σειρά ολοκλήρωσης-γράφοντας το σύνολο $\{(x, y) \mid 0 \leq x < +\infty, x \leq y < +\infty\}$ σαν $\{(x, y) \mid 0 \leq x < y, 0 \leq y < +\infty\}$.

Με ανάλογο σκεπτικό, για το δεύτερο ολοκλήρωμα, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} P(X < -x) dx &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{-x} f_X(y) dy \right) dx = \\
&= \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{-y} f_X(y) dx \right) dy = \\
&= \int_{-\infty}^0 f_X(y) dy \left(- \int_{-y}^0 1 dx \right) = \\
&= - \int_{-\infty}^0 y f_X(y) dy
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Για την δεύτερη ισότητα, αντιστρέψαμε την σειρά ολοκλήρωσης-γράφοντας το σύνολο $\{(x, y) \mid 0 \leq x < +\infty, -\infty \leq y < -x\}$ σαν $\{(x, y) \mid 0 \leq x < -y, -\infty \leq y < 0\}$.

Συνδυάζοντας τις 2 παραπάνω σχέσεις, έχουμε τελικά:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} P(X > x) dx - \int_0^{+\infty} P(X < -x) dx &= \\
\int_0^{+\infty} y f_X(y) dy - \left(- \int_{-\infty}^0 y f_X(y) dy \right) &= \int_0^{+\infty} y f_X(y) dy + \int_{-\infty}^0 y f_X(y) dy = \\
\int_{-\infty}^0 y f_X(y) dy + \int_0^{+\infty} y f_X(y) dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(y) dy = E[X]
\end{aligned}$$

Άσκηση 5

Έστω X συνεχής Τ.Μ. με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in (0, c) \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus (0, c) \end{cases}$$

, όπου c σταθερά με $c > 0$. Να υπολογιστούν:

- (i) Η σταθερά c .
- (ii) Η πιθανότητα $P(X \geq 1)$.
- (iii) Η πιθανότητα $P(X = 1)$.
- (iv) Η διασπορά της Τ.Μ. X , $VAR[X]$.

Λύση

- (i) Για να είναι η $f_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx + \int_0^c f_X(x) dx + \int_c^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \\
\Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^c \frac{x}{2} dx + \int_c^{+\infty} 0 dx &= 1 \Leftrightarrow \int_0^c \frac{x}{2} dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^c = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{2} - 0 \right) = 1 \Leftrightarrow \\
\frac{c^2}{4} &= 1 \Leftrightarrow \boxed{c = 2}
\end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα δίνεται από τον τύπο :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in (0, 2) \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus (0, 2) \end{cases}$$

- (ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε :

$$P(X \geq 1) = \int_1^{+\infty} f_X(x) dx = \int_1^2 f_X(x) dx = \int_1^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

- (iii) Εφ' όσον η X είναι συνεχής Τ.Μ., $P(X = 1) = 0$.

- (iv) Για τον υπολογισμό της διασποράς της Τ.Μ. X , $VAR[X]$, θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή από την θεωρία σχέση :

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f_X(x) dx + \int_0^2 x f_X(x) dx + \int_2^{+\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx + \int_2^{+\infty} x \cdot 0 dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} - 0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} \right) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της ροπής 2^{ας} τάξεως, $E[X^2]$, έχουμε :

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 f_X(x) dx + \int_0^2 x^2 f_X(x) dx + \int_2^{+\infty} x^2 f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 dx + \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx + \int_2^{+\infty} x^2 \cdot 0 dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{4} - 0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{4} \right) = \frac{16}{8} = 2 \end{aligned}$$

Άρα, η διασπορά της Τ.Μ. X , $VAR[X]$ θα είναι τελικά :

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2 - \left(\frac{4}{3} \right)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

Άσκηση 6

Έστω X συνεχής Τ.Μ. που ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, με $E[X] = 6$ και $P(X < 5) = 0.4$.

- (i) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.

- (ii) Η πιθανότητα $P(X \geq 8)$.

Λύση

- (i) **Παρατήρηση:** Σε αυτή την άσκηση μας δίνεται η κατανομή που ακολουθεί η Τ.Μ. X , χωρίς όμως να προσδιορίζεται το διάστημα $[a, b]$ στο οποίο ακολουθεί αυτή την κατανομή. Τα άκρα του εν λόγω διαστήματος (a, b) θα υπολογιστούν με βάση τα δεδομένα της άσκησης.

Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επίσης, είναι γνωστό πως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, η μέση τιμή της δίνεται από τον τύπο:

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $E[X] = 6$ από την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$E[X] = 6 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 6 \Rightarrow a+b = 12$$

Ακόμη, με βάση την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X < 5) = 0.4 &\Rightarrow \int_{-\infty}^5 f_X(x)dx = 0.4 \Rightarrow \int_{-\infty}^a f_X(x)dx + \int_a^5 f_X(x)dx = 0.4 \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^a 0dx + \int_a^5 \frac{1}{b-a}dx = 0.4 \Rightarrow \int_a^5 \frac{1}{b-a}dx = 0.4 \\ &\Rightarrow \frac{1}{b-a} \left[x \right]_a^5 = 0.4 \Rightarrow \frac{1}{b-a}(5-a) = 0.4 \Rightarrow 5-a = 0.4b - 0.4a \Rightarrow 0.6a + 0.4b = 5 \end{aligned}$$

Επιλύοντας το παρακάτω σύστημα εξισώσεων που προκύπτει:

$$\begin{cases} a+b = 12 \\ 0.6a + 0.4b = 5 \end{cases}$$

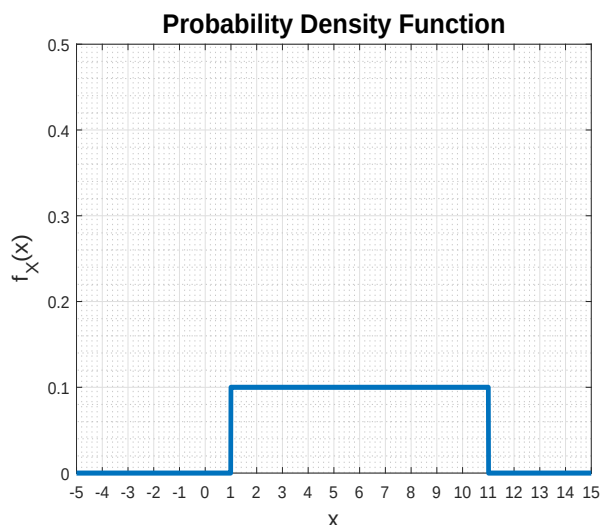
, με αγνώστους τα a, b , βρίσκουμε ότι:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 11 \end{cases}$$

Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 1 \leq x \leq 11 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 15]$) που φαίνεται στο Σχήμα 2.

Σχήμα 2: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

Παρατήρηση: Η $f_X(x)$ είναι μία *έγκυρη* Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^1 f_X(x) dx + \int_1^{11} f_X(x) dx + \int_{11}^{+\infty} f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{11} f_X(x) dx + \int_{11}^{+\infty} 0 dx = \int_1^{11} f_X(x) dx = \int_1^{11} \frac{1}{10} \left[x \right]_1^{11} = \frac{1}{10} (11 - 1) = \frac{10}{10} = 1 \end{aligned}$$

(ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= \int_8^{+\infty} f_X(x) dx = \int_8^{11} f_X(x) dx + \int_{11}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_8^{11} \frac{1}{10} dx + \int_{11}^{+\infty} 0 dx = \int_8^{11} \frac{1}{10} dx \\ &= \frac{1}{10} \left[x \right]_8^{11} = \frac{1}{10} (11 - 8) = \frac{1}{10} (3) = 0.3 \end{aligned}$$

Άσκηση 7

Προϊόν βιομηχανίας συσκευάζεται σε πακέτα. Το βάρος ενός πακέτου είναι συνεχής Τ.Μ. X , η οποία ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[8, 12]$. Το κόστος παραγωγής κάθε πακέτου είναι Τ.Μ. Y , για την οποία ισχύει η σχέση:

$$Y = 0.1X + 100$$

Αν ένα πακέτο έχει βάρος $\geq 9Kg$ τότε πωλείται προς 150 ευρώ, ενώ αν έχει βάρος $< 9Kg$ τότε πωλείται προς 80 ευρώ. Να υπολογιστεί η μέση τιμή του κέρδους για κάθε πακέτο.

Λύση

Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Με βάση τα δεδομένα της άσκησης, έχουμε $a = 8$, $b = 12$. Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 8 \leq x \leq 12 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την μέση τιμή του κέρδους για κάθε πακέτο, πρέπει να υπολογίσουμε το κέρδος για κάθε πακέτο ανάλογα με το βάρος του. Πιο συγκεκριμένα, το Κέρδος ($K(X)$) για κάθε πακέτο θα δίνεται με βάση την παρακάτω σχέση:

$$K(X) = \text{Τιμή-Πώλησης}(X) - \text{Κόστος Παραγωγής}(X)$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης, θα έχουμε λοιπόν:

- Αν $X < 9\text{Kg} \Rightarrow K_1(X) = 80 - (0.1X + 100)$
- Αν $X \geq 9\text{Kg} \Rightarrow K_2(X) = 150 - (0.1X + 100)$

Άρα, το κέρδος από κάθε πακέτο θα δίνεται τελικά από την σχέση:

$$K(x) = \begin{cases} K_1(x) = 80 - (0.1x + 100) & X < 9 \\ K_2(x) = 150 - (0.1x + 100) & X \geq 9 \end{cases}$$

Με βάση τον τύπο ορισμού και τις ιδιότητες της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[K(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x)f_X(x)dx = \int_{-\infty}^8 K(x) \cdot 0dx + \int_8^{12} K(x) \cdot \frac{1}{4}dx + \int_{12}^{+\infty} K(x) \cdot 0dx \\ &= \int_8^{12} K(x) \cdot \frac{1}{4}dx = \int_8^9 K_1(x) \cdot \frac{1}{4}dx + \int_9^{12} K_2(x) \cdot \frac{1}{4}dx \\ &= \frac{1}{4} \int_8^9 (80 - (0.1x + 100))dx + \frac{1}{4} \int_9^{12} (150 - (0.1x + 100))dx = \frac{1}{4} \int_8^9 (-0.1x - 20)dx + \frac{1}{4} \int_9^{12} (-0.1x + 50)dx \\ &= \frac{1}{4} \left(-0.1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_8^9 - 20 \left[x \right]_8^9 \right) + \frac{1}{4} \left(-0.1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_9^{12} + 50 \left[x \right]_9^{12} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[-0.1 \left(\frac{81}{2} - \frac{64}{2} \right) - 20(9 - 8) \right] + \frac{1}{4} \left[-0.1 \left(\frac{144}{2} - \frac{81}{2} \right) + 50(12 - 9) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[-0.1 \left(\frac{17}{2} \right) - 20 \right] + \frac{1}{4} \left[-0.1 \left(\frac{63}{2} \right) + 150 \right] = \frac{1}{4} \left[-0.1 \left(\frac{17}{2} + \frac{63}{2} \right) + 130 \right] = \frac{1}{4} \left[-0.1(40) + 130 \right] \\ &= \frac{1}{4}(-4 + 130) = \frac{126}{4} = \frac{63}{2} = 31.5 \end{aligned}$$

Άσκηση 8

Έστω ότι ο συρμός φτάνει σε έναν συγκεκριμένο σταθμό του μετρό κάθε 10 λεπτά, ξεκινώντας τα δρομολόγια του στις 05 : 00. Αν ένας επιβάτης φθάνει στον σταθμό σε χρόνο ο οποίος κατανέμεται ομοιόμορφα στο χρονικό διάστημα $[07 : 20, 07 : 40]$, να υπολογιστούν οι πιθανότητες να περιμένει τον συρμό:

- Το πολύ 4 λεπτά.
- Τουλάχιστον 7 λεπτά.

Λύση

Έστω X συνεχής Τ.Μ., η οποία αντιπροσωπεύει τον χρόνο άφιξης του επιβάτη στον σταθμό, και μετράται σε λεπτά ξεκινώντας από την χρονική στιγμή 07 : 20. Με βάση τα δεδομένα της άσκησης, η X θα ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 20]$, με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (i) Για να περιμένει ο επιβάτης το πολύ 4 λεπτά, σημαίνει πως φθάνει στον σταθμό είτε στο χρονικό διάστημα $[07 : 26, 07 : 30]$ είτε στο χρονικό διάστημα $[07 : 36, 07 : 40]$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$\begin{aligned} P_1 &= P(6 \leq X \leq 10) + P(16 \leq X \leq 20) = \int_6^{10} f_X(x)dx + \int_{16}^{20} f_X(x)dx = \int_6^{10} \frac{1}{20}dx + \int_{16}^{20} \frac{1}{20}dx \\ &= \frac{1}{20} \left[x \right]_6^{10} + \frac{1}{20} \left[x \right]_{16}^{20} = \frac{1}{20}(10 - 6) + \frac{1}{20}(20 - 16) = \frac{1}{20}(4) + \frac{1}{20}(4) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4 \end{aligned}$$

- (ii) Για να περιμένει ο επιβάτης τουλάχιστον 7 λεπτά, σημαίνει πως φθάνει στον σταθμό είτε στο χρονικό διάστημα $[07 : 20, 07 : 23]$ είτε στο χρονικό διάστημα $[07 : 30, 07 : 33]$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$\begin{aligned} P_1 &= P(0 \leq X \leq 3) + P(10 \leq X \leq 13) = \int_0^3 f_X(x)dx + \int_{10}^{13} f_X(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{20}dx + \int_{10}^{13} \frac{1}{20}dx \\ &= \frac{1}{20} \left[x \right]_0^3 + \frac{1}{20} \left[x \right]_{10}^{13} = \frac{1}{20}(3 - 0) + \frac{1}{20}(13 - 10) = \frac{1}{20}(3) + \frac{1}{20}(3) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0.3 \end{aligned}$$

Άσκηση 9

Η διάρκεια ζωής, T , μίας μηχανής ακολουθεί Εκθετική Κατανομή. Η μέση διάρκεια ζωής είναι ίση με 100 μονάδες χρόνου.

- (i) Να βρεθεί η πιθανότητα να πάθει βλάβη η μηχανή μέσα σε 200 μονάδες χρόνου.
 (ii) Να βρεθούν οι μονάδες χρόνου t_0 , έτσι ώστε η διάρκεια ζωής της μηχανής να τις υπερβαίνει με πιθανότητα ίση με 0.3.

Λύση

- (i) Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Εκθετική Κατανομή, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Επίσης, είναι γνωστό πως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Εκθετική Κατανομή, η μέση τιμή της δίνεται από τον τύπο:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $E[X] = 100$ από την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$E[X] = 100 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 100 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$$

Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{100}e^{-\frac{1}{100}x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η διάρκεια ζωής, T , καθορίζει την χρονική στιγμή κατά την οποία εμφανίζεται η βλάβη. Άρα, στο διάστημα $0 \leq X < T$ δεν υπάρχει βλάβη.

Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, επιθυμούμε η διάρκεια ζωής της μηχανής να είναι μικρότερη από 200 χρονικές μονάδες. Η πιθανότητα με την οποία συμβαίνει αυτό θα είναι:

$$P = P(T < 200) = \int_0^{200} f_X(x)dx = \int_0^{200} \frac{1}{100}e^{-\frac{1}{100}x}dx = -\left[e^{-\frac{1}{100}x}\right]_0^{200} = -(e^{-2}-1) = 1-e^{-2}$$

(ii) Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(T > t_0) = 0.3 &\Rightarrow \int_{t_0}^{+\infty} f_X(x)dx = 0.3 \Rightarrow \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{100}e^{-\frac{1}{100}x}dx = 0.3 \\ &\Rightarrow -\left[e^{-\frac{1}{100}x}\right]_{t_0}^{+\infty} = 0.3 \Rightarrow -(0 - e^{-\frac{t_0}{100}}) = 0.3 \Rightarrow e^{-\frac{t_0}{100}} = 0.3 \\ &\Rightarrow -\frac{t_0}{100} = \ln(0.3) \Rightarrow t_0 = -100 \ln(0.3) \Rightarrow t_0 = -100(-1.2040) \Rightarrow t_0 = 120.40 \end{aligned}$$