ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 7

Άσκηση 1
Θεωρείστε τις δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$
$X=1$	1/9	2/9	1/9
$X=2$	0	1/9	2/9
$X=3$	1/9	0	1/9

(α) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_X(x)$ της τ.μ. X. Υπολογίστε την μέση τιμή της X, $E[X]$.

(β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_Y(y)$ της τ.μ. Y. Υπολογίστε την μέση τιμή της Y, $E[Y]$.

(γ) Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.π. της τ.μ. Y, $p_{Y/A}(y)$, δεδομένου του γεγονότος $A = \{X \leq 2\}$. Ποια είναι η μέση τιμή, δεύτερη ροπή, και διασπορά της τ.μ. Y δεδομένου του Α, δηλαδή ποια είναι τα $E[Y/A]$,$E[Y^2/A]$, και $var(Y/A)$, αντίστοιχα ;

(δ) Εστω η τ.μ. $Z = g(X,Y) = 3X + 2Y + 7$. Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ. Z.

(ε) Εστω η τ.μ. $\tilde{X}$ με την ίδια σ.π. όπως η τ.μ. X και η τ.μ. $\tilde{Y}$ με την ίδια σ.π. όπως η τ.μ. Y. Έστω ότι οι τ.μ. $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ είναι ανεξάρτητες. Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$.

Λύση

(α')

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^{3} p_{X,Y}(x,y),\ x = 1,2,3$$

Από τον πίνακα τιμών της $p_{X,Y}(x,y)$ προκύπτει εύκολα ότι:

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/9, & x = 1 \\ 3/9, & x = 2 \\ 2/9, & x = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$E[X] = \sum_{x=1}^{3} x \cdot p_X(x) = 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$$

(β') Ομοίως,

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^{3} p_{X,Y}(x,y),\ y = 1,2,3$$

Από τον πίνακα τιμών της $p_{X,Y}(x,y)$ προκύπτει εύκολα ότι:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2/9, & y = 1 \\ 3/9, & y = 2 \\ 4/9, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε πως:

$$E[Y] = \sum_{y=1}^{3} y \cdot p_Y(y) = 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$$

(γ') Έχουμε ότι:

$$P_{Y|A}(y) = \frac{P(Y = y,\, A)}{P(A)}$$

όπου,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \le 2) = \sum_{i=1}^{2} p_X(x) \\ &= p_X(1) + p_X(2) \\ &= \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

- $\{Y = 1\} \cap \{X \le 2\} = \Big\{(1,1),\, (2,1)\Big\}$. ’ρα,
  $P(Y = 1,\, A) = p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(2,1) = \frac{1}{9} + 0 = \frac{1}{9}$
- $\{Y = 2\} \cap \{X \le 2\} = \Big\{(1,2),\, (2,2)\Big\}$. ’ρα,
  $P(Y = 2,\, A) = p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(2,2) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$
- $\{Y = 3\} \cap \{X \le 2\} = \Big\{(1,3),\, (2,3)\Big\}$. ’ρα,
  $P(Y = 3,\, A) = p_{X,Y}(1,3) + p_{X,Y}(2,3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9}$

Άρα, θα είναι:

$$p_{Y|A}(y) = \begin{cases} 1/7, & y = 1 \\ 3/7, & y = 2 \\ 3/7, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$E[Y|A] = \sum_{y=1}^{3} y \cdot p_{Y|A}(y) = 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{3}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{16}{7}$$

$$E[Y^2|A] = \sum_{y=1}^{3} y^2 \cdot p_{Y|A}(y) = 1^2 \cdot \frac{1}{7} + 2^2 \cdot \frac{3}{7} + 3^2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{40}{7}$$

$$var(Y|A) = E[Y^2|A] - \Big(E[Y|A]\Big)^2 = \frac{40}{7} - \Big(\frac{16}{7}\Big)^2 = \frac{24}{49} = 0.49$$

(δ΄) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E[Z] &= E[3 \cdot X + 2 \cdot Y + 7] \\ &= 3 \cdot E[X] + 2 \cdot E[Y] + 7 \\ &= 3 \cdot \frac{16}{9} + 2 \cdot \frac{20}{9} + 7 \\ &= \frac{151}{9} \\ &= 16.78 \end{aligned}$$

(ε΄) Καθώς οι $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, θα είναι:

$$p_{\tilde{X},\tilde{Y}}(x,y) = p_{\tilde{X}}(x) \cdot p_{\tilde{Y}}(y), \;\; x,y = 1,2,3.$$

όπου οι $p_{\tilde{X}}(x)$ και $p_{\tilde{Y}}(y)$ ακολουθούν τις εκφράσεις στα (α) και (β).

Οι τιμές της $p_{\tilde{X},\tilde{Y}}(x,y)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	$\tilde{Y}$=1	**$\tilde{Y}$=2**	**$\tilde{Y}$=3**
$\tilde{X}$=1	$\frac{8}{81}$	$\frac{12}{81}$	$\frac{16}{81}$
$\tilde{X}$=2	$\frac{6}{81}$	$\frac{9}{81}$	$\frac{12}{81}$
$\tilde{X}$=3	$\frac{4}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{8}{81}$

Άσκηση 2

Έχετε στα χέρια σας ένα δίκαιο 6-εδρο ζάρι και ένα δίκαιο κέρμα. Ρίχνετε πρώτα το ζάρι και έστω X ο αριθμός που έρχεται. Στη συνέχεια, ρίχνετε το κέρμα X φορές και έστω ότι εμφανίζονται Y κεφαλές.

(α΄) Ποια είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $p_{Y/X}(y/x)$; Δώστε την πλήρη μαθηματική περιγραφή της.

(β΄) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y = 3\,/\,X = 6)$.

(γ΄) Ποια είναι η Συνάρτηση Πιθανότητας της τ.μ. X;

(δ΄) Υπολογίστε την από κοινού Σ.Π. $p_{X,Y}(x,y)$ των τ.μ. X και Y.

(ε΄) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος να εμφανιστούν μόνο κεφαλές, δηλαδή $P(X = Y)$.

Λύση

(α΄) Δεδομένου ότι φέρνουμε $X = x$ στη ρίψη του 6-εδρου δίκαιου ζαριού, ρίχνουμε το κέρμα x φορές και το πλήθος Y των κεφαλών που εμφανίζονται ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = x$ και $p = \frac{1}{2}$:

$$Y/\{X = x\} \sim \Delta(x, \frac{1}{2})$$

Συνεπώς,

$$P_{Y/X}(y/x) = \binom{x}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-y} = \binom{x}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}; \quad 1 \le x \le 6, \; 0 \le y \le x.$$

(β΄) $P(Y = 3\,/\,X = 6) = P_{Y/X}(y = 3\,/\,x = 6) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \frac{20}{64} = 0.3125.$

(γ΄) Προφανώς, η X είναι διακριτή ομοιόμορφη τ.μ. στο πεδίο τιμών $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(δ΄) Γνωρίζουμε ότι η δεσμευμένη Σ.Π. συχνά είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό της από κοινού Σ.Π. μέσω του Πολλαπλασιαστικού νόμου:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_Y(y) \cdot p_{X/Y}(x/y) \\ &= p_X(x) \cdot p_{Y/X}(y/x) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η από κοινού Σ.Π. των X και Y είναι:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_X(x) \cdot p_{Y|X}(y|x) \\ &= \frac{1}{6}\binom{x}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 1 \le x \le 6,\ 0 \le y \le x. \end{aligned}$$

(ε΄) Η πιθανότητα του γεγονότος να εμφανιστούν μόνο κεφαλές είναι

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{i=1}^{6} p_{X,Y}(i, i) \qquad (x = i, y = i) \\ &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\binom{i}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^6\right] = 0.164. \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Ο Χρήστος αφιερώνει Κ ώρες στην αγορά βιβλίων, όπου Κ μια διακριτή τ.μ με ισοπίθανες τιμές 1,2,3 και 4. Ο αριθμός Ν των βιβλίων που αγοράζει ο Χρήστος είναι και αυτός μια διακριτή τ.μ που εξαρτάται από το πόση ώρα ψωνίζει. Άρα:

$$p_{N/K}(n/k) = \frac{1}{k}, \text{ για } n = 1, \ldots, k.$$

(α) Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των K και N.
(β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. της N.
(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. της K δεδομένου του γεγονότος $N = 2$.
(δ) Μας δίδεται ότι ο Χρήστος αγόρασε τουλάχιστον 2 αλλά όχι περισσότερα από 3 βιβλία. Υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της K, δεδομένης της παραπάνω πληροφορίας.
(ε) Το κόστος κάθε βιβλίου είναι τ.μ. με μέση τιμή ίση με 3 ευρώ. Υπολογίστε τη μέση τιμή του ποσού το οποίο ο Χρήστος ξόδεψε συνολικά σε βιβλία. Υπόδειξη: Δεσμεύστε ως προς τα γεγονότα $N = 1, \ldots, N = 4$ και χρησιμοποιήστε το θεώρημα ολικής μέσης τιμής.

Λύση

(α) Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $p_{N,K}(n, k) = p_{N|K}(n|k)p_K(k)$ για να υπολογίσουμε την από κοινού $σ.π.π$:

$$p_{N,K}(n, k) = \begin{cases} 1/(4k), & k = 1, 2, 3, 4 \text{ και } n = 1, ..., k; \\ 0, & \text{αλλίως} \end{cases}$$

(β) Η $σ.π.π$ $p_N(n)$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$p_N(n) = \sum_k p_{N,K}(n, k) = \sum_{k=n}^{4} \frac{1}{4k}$$

δηλαδή:

$$p_N(n) = \begin{cases} 25/48, & n=1 \\ 13/48, & n=2 \\ 7/48, & n=3 \\ 3/48, & n=4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(γ) Η δεσμευμένη $\sigma.\pi.\pi$ είναι:

$$p_{K|N}(k|2) = \frac{p_{N,K}(2,k)}{p_N(2)} = \begin{cases} 6/13, & k=2; \\ 4/13, & k=3; \\ 3/13, & k=4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(δ) Έστω A το γεγονός ότι $2 \leq N \leq 3$. Πρώτα υπολογίζουμε την δεσμευμένη $\sigma.\pi.\pi$ του K δεδομένου του A:

$$p_{K|A}(k) = \frac{P(K=k,A)}{P(A)}$$

$$P(A) = p_N(2) + p_N(3) = 5/12$$

$$P(K=k,A) = \begin{cases} 1/8, & k=2; \\ 1/12+1/12, & k=3; \\ 1/16+1/16, & k=4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$p_{K|A}(k) = \begin{cases} 3/10, & k=2; \\ 2/5, & k=3; \\ 3/10, & k=4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επειδή η δεσμευμένη $\sigma.\pi.\pi$ του K δεδομένου του A είναι συμμετρική γύρω από το $k=3$, γνωρίζουμε ότι $E[K|A]=3$. Μπορούμε τώρα να υπολογίζουμε την δεσμευμένη διασπορά του K δεδομένου του A:

$$var(K|A) = E[(K-E[K|A])^2|A] = 3/10(2-3)^2 + 2/5(0) + 3/10(4-3)^2 = 3/5$$

(ε) Έστω C_i το κόστος ενός βιβλίου i και $E[C_i]=3$. Έστω T το συνολικό κόστος, δηλαδή $T = C_1 + ... + C_N$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το $E[T]$ ως εξής:

$$\begin{aligned} E[T] &= \sum_{i=1}^{4} E[T|N=i]p_N(i) \\ &= E[C_i]p_N(1) + 2E[C_i]p_N(2) + 3E[C_i]p_N(3) + 4E[C_i]p_N(4) \\ &= 3(25/48) + 6(13/48) + 9(7/48) + 12(1/16) \\ &= 21/4 \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Οι τ.μ. X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.):

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy, & \text{αν } x \in \{2,3,5\} \text{ και } y \in \{2,3\} \\ 0, & \text{αλλίως} \end{cases}$$

(α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c.
(β) Βρείτε την $P(Y < X)$.
(γ) Βρείτε την $P(Y > X)$.
(δ) Βρείτε την $P(Y = X)$.

(ε) Βρείτε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.
(στ) Βρείτε την $P(X = 5)$.
(ζ) Βρείτε τις μέσες τιμές $E[X],\ E[Y]$.
(η) Βρείτε τις διασπορές $var(X),\ var(Y)$.

Λύση

(α) Πρέπει: $\sum_x \sum_y P_{X,Y}(x,y) = 1$. Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}(2\cdot 2)c + (2\cdot 3)c + (3\cdot 2)c + (3\cdot 3)c + (5\cdot 2)c + (5\cdot 3)c &= 1\\ (4+6+6+9+10+15)c &= 1\\ \Rightarrow 50c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{50}\end{aligned}$$

Ο πίνακας τιμών της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας και των περιθωριακών συναρτήσεων πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ γίνεται:

$Y \backslash X$	2	3	5	$\mathbf{P_Y(y)}$
2	4/50	6/50	10/50	20/50
3	6/50	9/50	15/50	30/50
$P_X(x)$	10/50	15/50	25/50	

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned}P(Y < X) &= P(\{(3,2) \text{ ή } (5,2) \text{ ή } (5,3)\})\\ &= P_{X,Y}(3,2) + P_{X,Y}(5,2) + P_{X,Y}(5,3)\\ &= \frac{6}{50} + \frac{10}{50} + \frac{15}{50} = \frac{31}{50}\end{aligned}$$

(γ)

$$P(Y > X) = P(\{(2,3)\}) = P_{X,Y}(2,3) = \frac{6}{50}$$

(δ)

$$\begin{aligned}P(Y = X) &= P(\{(2,2) \text{ ή } (3,3)\}) = P_{X,Y}(2,2) + P_{X,Y}(3,3)\\ &= \frac{4}{50} + \frac{9}{50} = \frac{13}{50}\end{aligned}$$

(ε) Οι περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας των τ.μ X και Y είναι:

$$P_X(x) = \sum_Y P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 10/50, & x = 2\\ 15/50, & x = 3\\ 25/50, & x = 5\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

$$P_Y(y) = \sum_X P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 20/50, & y = 2\\ 30/50, & y = 3\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

(στ) $P(X=5) = P_X(5) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$

(ζ) Οι μέσες τιμές των τ.μ X και Y γίνονται:

$$E[X] = 2\frac{10}{50} + 3\frac{15}{50} + 5\frac{25}{50} = \frac{190}{50} = 3.8$$

$$E[Y] = 2\frac{20}{50} + 3\frac{30}{50} = \frac{130}{50} = 2.6$$

(η) Για να βρούμε τις διασπορές των τ.μ X και Y πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις παρακάτω ποσότητες:

$$E[X^2] = 2^2\frac{10}{50} + 3^2\frac{15}{50} + 5^2\frac{25}{50} = \frac{800}{50} = 16$$

$$E[Y^2] = 2^2\frac{20}{50} + 3^2\frac{30}{50} = \frac{350}{50} = 7$$

Οπότε έχουμε,

$$var(X) = 16 - (3.8)^2 = 1.56$$

$$var(Y) = 7 - (2.6)^2 = 0.24$$

Άσκηση 5

Στα παρακάτω ερωτήματα επιλέξτε τη σωστή απάντηση και αιτιολογείστε την επιλογή σας:

(α) Έστω δύο διακριτές τ.μ. X και Y, όπου κάθε μία παίρνει τιμές $\{1,2,3\}$. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας είναι $p_{X,Y}(x,y) = 0$, αν $(x,y) \in \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$ και $p_{X,Y}(x,y) > 0$, αν $(x,y) \in \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3)\}$. Τότε:

(i) Οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες.
(ii) Οι τ.μ. X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(β) Έστω 4 ανεξάρτητες τ.μ. Bernoulli $X_i,\ i = 1,\ldots,4$, με παραμέτρο $p = 0.1$. Ορίζουμε την τ.μ. $X = \sum_{i=1}^{4} X_i$. Τότε:

(i) $E[X_1/X=2] = 0.1$.
(ii) $E[X_1/X=2] = 0.5$.
(iii) $E[X_1/X=2] = 0.25$.

(γ) Οι ανεξάρτητες τ.μ. X και Y είναι Διωνυμικές με παραμέτρους $(n=10,\ p)$ και $(n=5,\ q)$, αντίστοιχα. Δηλαδή $X \sim \Delta(10,p)$ και $Y \sim \Delta(5,q)$. Η διασπορά της τ.μ. $Z = 3 + 2X + 5Y$ είναι:

(i) $20p(1-p) + 25q(1-q)$.
(ii) $9 + 40p(1-p) + 125q(1-q)$.
(iii) $40p(1-p) + 125q(1-q)$.

Λύση

(α) Οι τ.μ. X και Y *δεν* είναι ανεξάρτητες. Π.χ. δεδομένου ότι $X=1$, η Y δεν μπορεί ποτέ να πάρει την τιμή 3, καθώς $p_{Y/X}(3/1) = p_{X,Y}(1,3)/p_X(1) = 0/p_X(1) = 0$. Από την άλλη, $p_Y(3) = p_{X,Y}(2,3) + p_{X,Y}(3,3) > 0$. Άρα, $p_Y(3) \neq p_{Y/X}(3/1)$.

(β) Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι η τ.μ. X είναι Διωνυμική ως άθροισμα τ.μ. Bernoulli, δηλαδή $X \sim \Delta(4, p)$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1/X = 2) &= \frac{P(X_1 = 1 \cap X = 2)}{P(X = 2)} \\ &= \frac{p \cdot \binom{3}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{3-1}}{\binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{4-2}} = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Συνεπώς, $P(X_1 = 0/X = 2) = 1 - P(X_1 = 1/X = 2) = \frac{1}{2}$.
Τελικά, $E[X_1/X = 2] = 1 \cdot P(X_1/X = 2) + 0 \cdot P(X_1 = 0/X = 2) = 0.5$

(γ) Αφού οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, η διασπορά του αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των διασπορών:

$$\begin{aligned} var(Z) &= var(3 + 2X + 5Y) = var(2X) + var(5Y) \\ &= 4var(X) + 25var(Y) \\ &= 4 \cdot 10p(1-p) + 25 \cdot 5q(1-q) \\ &= 40p(1-p) + 125q(1-q) \end{aligned}$$