

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2019-2020
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 5

Άσκηση 1

Το πείραμά μας συνίσταται στη ρίψη 3 “τίμιων” κερμάτων. Συμβολίζουμε με X τον αριθμό που μας λέει πόσες φορές εμφανίστηκε κορώνα. Να βρεθούν οι τιμές που παίρνει η Τ.Μ. X και να υπολογιστεί η Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) (PMF), $p_X(x)$, αυτής.

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα: $K=\{\text{έρχεται κορώνα}\}$ και $\Gamma=\{\text{έρχεται γράμματα}\}$.

Τα κέρματα είναι “τίμια”, άρα $P(K) = \frac{1}{2}$ και $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$.

Η Τ.Μ. X λαμβάνει τις τιμές $x = 0, 1, 2, 3$, καθώς μπορεί να εμφανιστεί κορώνα από 0 – 3 φορές συνολικά. Βρίσκουμε λοιπόν αναλυτικά:

- $p_X(0) = P(X = 0) = P(\{\Gamma, \Gamma, \Gamma\}) = P(\Gamma) \cdot P(\Gamma) \cdot P(\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
- $p_X(1) = P(X = 1) = P(\{K, \Gamma, \Gamma\}) + P(\{\Gamma, K, \Gamma\}) + P(\{\Gamma, \Gamma, K\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- $p_X(2) = P(X = 2) = P(\{K, K, \Gamma\}) + P(\{K, \Gamma, K\}) + P(\{\Gamma, K, K\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- $p_X(3) = P(X = 3) = P(\{K, K, K\}) = P(K) \cdot P(K) \cdot P(K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

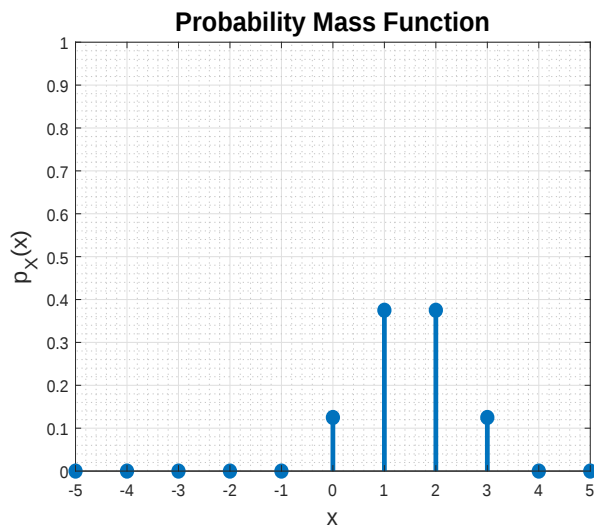
Άρα, η PMF θα είναι:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x = 0, 3 \\ \frac{3}{8} & x = 1, 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η $p_X(x)$ είναι μία *έγκυρη* Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας), καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\sum_x p_X(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Η γραφική της παράσταση (*περιορισμένη* στο διάστημα $[-5, 5]$) φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) $p_X(x)$.

Άσκηση 2

Έστω διακριτή τυχαία μεταβλητή X με PMF:

$$p_X(x) = c \cdot x, \quad x = 1, 2, \dots, n$$

Να υπολογιστεί η σταθερά c .

Λύση

Θα πρέπει να ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\sum_x p_X(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^n c \cdot x = 1 \Rightarrow c \cdot \sum_{x=1}^n x = 1 \Rightarrow c \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{n(n+1)}$$

Παρατήρηση: Για την εύρεση του αθροίσματος $\sum_{x=1}^n x$ χρησιμοποιήθηκε ο τύπος υπολογισμού του αθροίσματος n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου:

$$\sum_{x=1}^n x = \frac{n(n+1)}{2}$$

Άσκηση 3 Το ένα δέκατο των εργαλείων που κατασκευάζει μία εταιρεία είναι ελαττωματικά. Υπολογίστε την πιθανότητα, σε ένα τυχαίο δείγμα 10 εργαλείων να βγουν 2 ακριβώς εργαλεία ελαττωματικά:

- (i) Χρησιμοποιώντας τη Διωνυμική Κατανομή.
- (ii) Προσεγγίζοντας τη Διωνυμική Κατανομή με μία Κατανομή Poisson.

Λύση

- (i) Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, η πιθανότητα επιλογής ελαττωματικού εργαλείου είναι $p = 0.1$.

Εαν η τυχαία μεταβλητή X παριστάνει το πλήθος των ελαττωματικών εργαλείων σε δείγμα 10 εργαλείων, τότε η Διωνυμική Κατανομή δίνει:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^8 = 45 \cdot 0.01 \cdot 0.43 \approx \boxed{0.194}$$

- (ii) Η Κατανομή Poisson που προσεγγίζει τη Διωνυμική αυτή Κατανομή έχει:

$$\lambda = n \cdot p = 10 \cdot 0.1 = 1$$

Άρα, στην περίπτωση αυτή, έχουμε:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \quad \text{και} \quad P(X = 2) = \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} \approx \boxed{0.184}$$

Παρατήρηση: Η προσέγγιση κατά Poisson, γενικά αποδίδει καλύτερα αποτελέσματα στις περιπτώσεις που $n \rightarrow \infty$ και $p \rightarrow 0$.

Άσκηση 4

Η πιθανότητα να αντιδράσει άσχημα ένας ασθενής σε μία ένεση είναι 0.001. Εάν η ένεση γίνει σε 2000 ασθενείς, υπολογίστε την πιθανότητα να αντιδράσουν άσχημα:

- (i) Ακριβώς 3 ασθενείς.
(ii) Περισσότεροι από 2 ασθενείς.

Λύση

Έστω τυχαία μεταβλητή X που παριστάνει το πλήθος των ασθενών που θα αντιδράσουν άσχημα. Η X έχει Διωνυμική Κατανομή, αλλά, επειδή η "άσχημη αντίδραση" είναι σπάνιο γεγονός (συνδυαστικά με το γεγονός ότι έχουμε ένα αρκούντως μεγάλο δείγμα ασθενών), μπορούμε να δεχτούμε ότι ακολουθεί κατανομή Poisson. Οπότε, έχουμε:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad \text{όπου } \lambda = n \cdot p = 2000 \cdot 0.001 = 2$$

Με βάση την προσέγγιση αυτή, έχουμε:

- (i)

$$P(X = 3) = \frac{e^{-2} \cdot 2^3}{3!} \approx \boxed{0.18}$$

- (ii)

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - \left(\frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} \right) \\ &= 1 - \left(\frac{e^{-2} \cdot 1}{1} + \frac{e^{-2} \cdot 2}{1} + \frac{e^{-2} \cdot 4}{2} \right) = 1 - 5e^{-2} \approx \boxed{0.323} \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Ένας ακριβής υπολογισμός των ίδιων πιθανοτήτων με τη χρήση της Διωνυμικής Κατανομής θα περιλάμβανε πολύ περισσότερο κόπο, δεδομένων των πολύ μεγάλων υπολογισμών που θα προέκυπταν (π.χ. 2000! κτλ.).

Άσκηση 5

- (i) Θεωρείστε μία Διωνυμική Τυχαία Μεταβλητή X , με παραμέτρους n και p . Έστω k^* ο μέγιστος ακέραιος ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος του $(n+1)p$. Δείξτε ότι η PMF, $p_X(k)$, είναι μονοτονικά μη-φθίνουσα ως προς k στο διάστημα $[0, k^*)$, και είναι μονοτονικά φθίνουσα ως προς k για $k \geq k^*$.
- (ii) Έστω ότι X είναι μία Τυχαία Μεταβλητή Poisson, με παράμετρο λ . Δείξτε ότι η PMF, $p_X(k)$, αυξάνει μονοτονικά ως προς k μέχρι το σημείο όπου το k ισούται με τον μέγιστο ακέραιο που δεν ξεπερνά την λ , και μετά το σημείο αυτό είναι μονοτονικά φθίνουσα ως προς k .

Λύση

- (i) Για $k = 1, 2, \dots, n$, έχουμε:

$$\frac{p_X(k)}{p_X(k-1)} = \frac{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1) \cdot p}{k \cdot (1-p)} = \frac{(n+1)p - kp}{k - kp}$$

- Αν $k \leq k^*$, τότε $k \leq (n+1)p$. Ισοδύναμα: $k - kp \leq (n+1)p - kp$, συνεπώς ο παραπάνω λόγος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Ως εκ τούτου, η $p_X(k)$ είναι μονοτονικά μη-φθίνουσα στο εν λόγω διάστημα.
- Αν $k > k^*$, τότε ο παραπάνω λόγος είναι μικρότερος του 1. Ως εκ τούτου, η $p_X(k)$ είναι μονοτονικά φθίνουσα στο εν λόγω διάστημα.

- (ii) Χρησιμοποιώντας τον τύπο για την Poisson PMF, για $k \geq 1$, έχουμε:

$$\frac{p_X(k)}{p_X(k-1)} = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{(k-1)!}{\lambda^{k-1} \cdot e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{k}$$

- Αν $k \leq \lambda$, τότε ο παραπάνω λόγος είναι μεγαλύτερος του 1. Ως εκ τούτου, η $p_X(k)$ είναι μονοτονικά αύξουσα στο εν λόγω διάστημα.
- Αν $k > \lambda$, τότε ο παραπάνω λόγος είναι μικρότερος του 1. Ως εκ τούτου, η $p_X(k)$ είναι μονοτονικά φθίνουσα στο εν λόγω διάστημα.

Άσκηση 6

Ένας αφηρημένος λογιστής έχει στην τσέπη του n κλειδιά, από τα οποία μόνο 1 (δε θυμάται ποιο...) ταιριάζει στην πόρτα του γραφείου του. Επιλέγει τυχαία ένα κλειδί και το δοκιμάζει στην κλειδαριά. Αν δεν ταιριάζει, επιλέγει ένα άλλο και ξαναπροσπαθεί μέχρις ότου επιλέξει το σωστό κλειδί και ξεκλειδώσει την πόρτα του. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X ως το πλήθος των κλειδιών που δοκιμάζει (συμπεριλαμβανομένου και του τελευταίου με το οποίο ανοίγει τελικά την πόρτα). Να υπολογιστεί η Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) $p_X(k)$, αν για κάθε κλειδί το οποίο δεν ανοίγει την πόρτα, το τοποθετεί ξανά πίσω στην τσέπη του.

Λύση

Όταν ο λογιστής βάζει πίσω στην τσέπη του το λάθος κλειδί, δηλαδή επιλέγει με επανάθεση, έχουμε ουσιαστικά μία ακολουθία *Ανεξάρτητων Δοκιμών Bernoulli*, με πιθανότητα επιτυχίας $p = \frac{1}{n}$ και αποτυχίας $1 - p = 1 - \frac{1}{n}$. Συνεπώς, η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί Γεωμετρική Κατανομή, και κατ' επέκταση η ζητούμενη Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) θα είναι:

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Άσκηση 7

Σε μία τηλεφωνική συνομιλία, κατά τη διάρκεια κάθε λεπτού υπάρχει μία πιθανότητα 0.05 να “πέσει” η γραμμή. Υποθέτουμε πως η συμπεριφορά της τηλεφωνικής γραμμής από λεπτό σε λεπτό είναι ανεξάρτητη.

- (i) Ποια είναι η πιθανότητα να “πέσει” η γραμμή για 1^η φορά κατά το 5^ο λεπτό της συνομιλίας;
- (ii) Ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει “πέσει” η γραμμή κατά τα πρώτα 10 λεπτά της συνομιλίας;

Λύση

Έστω X τυχαία μεταβλητή που δείχνει σε ποιο λεπτό της συνομιλίας έπεσε η γραμμή.

Η X ακολουθεί τη Γεωμετρική Κατανομή με παράμετρο επιτυχίας $p = 0.05$, αφού κάθε λεπτό αποτελεί *Ανεξάρτητη Δοκιμή Bernoulli*, με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.05$.

Παρατήρηση: Σε αυτή τη *Δοκιμή Bernoulli* που μελετάμε, έχουμε θεωρήσει ως “έπιτυχία” την περίπτωση που η γραμμή “πέφτει”.

Με βάση τα παραπάνω, έχουμε:

- (i) Η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(X = 5) = (1 - 0.05)^4 \cdot 0.05 \approx 0.041$$

- (ii) Η γραμμή δεν θα “πέσει” τα πρώτα 10 λεπτά, αν και μόνο αν έχουμε 10 αποτυχίες στη σειρά (δηλαδή, για 10 συνεχόμενα λεπτά η γραμμή διατηρείται ανέπαφη). Έτσι, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(X > 10) = (1 - 0.05)^{10} \approx 0.599$$

Άσκηση 8

Έστω ότι ρίχνουμε βολές εναντίον στόχου με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.3$. Να υπολογιστεί ο αριθμός n των βολών που απαιτούνται, έτσι ώστε η πιθανότητα να χτυπηθεί ο στόχος τουλάχιστον 1 φορά να είναι τουλάχιστον 90%.

Λύση

Έστω X τυχαία μεταβλητή που μετράει το πλήθος των επιτυχών βολών μας.

Η X ακολουθεί Διωνυμική Κατανομή, με πιθανότητα $p = 0.3$. Η δεύτερη παράμετρος της κατανομής (n), θα υπολογιστεί από τα δεδομένα της άσκησης ως εξής:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &\geq 0.9 \Rightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0.9 \\ \Rightarrow 1 - \left[\binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^n \right] &\geq 0.9 \Rightarrow 1 - 0.7^n \geq 0.9 \\ \Rightarrow 0.7^n &\leq 0.1 \Rightarrow n \cdot \ln(0.7) \leq \ln(0.1) \\ \Rightarrow n &\geq \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.7)} \Rightarrow n \geq \frac{-2.303}{-0.357} \Rightarrow n \geq 6.451 \Rightarrow \boxed{n \geq 7} \end{aligned}$$

, αφού το n είναι φυσικός αριθμός.

Παρατήρηση: Η φορά της παραπάνω ανίσωσης άλλαξε, διότι διαιρέσαμε με το $\ln(0.7)$, που είναι αρνητικός αριθμός.

Άσκηση 9

Ένα δοχείο περιέχει αρχικά 1 κόκκινη και 1 μπλε μπάλα. Σε κάθε στάδιο του πειράματος, επιλέγουμε τυχαία 1 μπάλα και την επανατοποθετούμε μέσα στο δοχείο μαζί με ακόμη 1 μπάλα του ίδιου χρώματος. Δηλαδή, αν την πρώτη φορά επιλέξουμε την κόκκινη μπάλα, τότε αυτή τοποθετείται πάλι στο δοχείο μαζί με 1 ακόμη κόκκινη μπάλα (οπότε, το δοχείο περιέχει συνολικά 2 κόκκινες μπάλες και 1 μπλε μπάλα). Έστω X το πλήθος των σταδίων έως την επιλογή της μπλε μπάλας.

- (i) Να υπολογίσετε τη Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) της τυχαίας μεταβλητής X .
- (ii) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > n)$, όπου n φυσικός αριθμός, και δείξτε ότι η πιθανότητα του γεγονότος να επιλεγεί τελικά η μπλε μπάλα, κάποια στιγμή στο μέλλον, είναι ίση με 1.

Λύση

Με τη βοήθεια της κοινής λογικής, καταλαβαίνουμε ότι αν για πρώτη φορά επιλέξουμε μπλε μπάλα στο i -οστό στάδιο, τότε αναγκαστικά στα προηγούμενα $(i - 1)$ στάδια είχαμε επιλέξει κόκκινη μπάλα.

- (i) Έχουμε λοιπόν, αναλυτικά:

$$\begin{aligned} \bullet P(X = 1) &= \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{1 \cdot (1+1)} \\ \bullet P(X = 2) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot (2+1)} \\ \bullet P(X = 3) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot (3+1)} \\ \bullet P(X = 4) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{4 \cdot (4+1)} \\ \bullet \dots \end{aligned}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) ακολουθεί ένα συγκεκριμένο “μοτίβο”, που μπορεί να μας δώσει ένα γενικό τύπο. Αυτός είναι ο εξής:

$$P(X = i) = \frac{1}{i \cdot (i + 1)}, \quad i \geq 1$$

- (ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X > n) &= 1 - P(X \leq n) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i \cdot (i + 1)} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)} \right) \\ &= 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right] \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Θα βρούμε, τώρα, την πιθανότητα όταν $n \rightarrow \infty$. Τότε, έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X > n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Συνεπώς, αφού η τυχαία μεταβλητή X αντιπροσωπεύει το πλήθος των σταδίων έως την επιλογή της μπλε μπάλας, καταλαβαίνουμε ότι η μπλε μπάλα θα επιλεγεί κάποια στιγμή στο μέλλον (μετά από πεπερασμένο αριθμό σταδίων), με πιθανότητα 1!