

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2019-2020
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 1

Άσκηση 1

Αν A, B, C είναι τρία ενδεχόμενα, γράψτε τα σύνολα που περιγράφουν τα παρακάτω ενδεχόμενα:

- α) Τουλάχιστον ένα από τα A, B, C συμβαίνει.
- β) Δεν συμβαίνει κανένα από τα A, B, C .
- γ) Συμβαίνει το πολύ ένα από τα A, B, C .
- δ) Συμβαίνει ακριβώς ένα από τα A, B, C .
- ε) Συμβαίνουν τουλάχιστον δύο από τα A, B, C .
- στ) Συμβαίνουν το πολύ δύο από τα A, B, C .
- ζ) Και τα τρία γεγονότα A, B, C συμβαίνουν.
- η) Τα γεγονότα A και B συμβαίνουν, αλλά όχι το C .
- θ) Μόνο το A συμβαίνει.
- ι) Ακριβώς δύο από τα A, B, C συμβαίνουν.
- κ) Το πολύ τρία γεγονότα συμβαίνουν.

Λύση

- α) $A \cup B \cup C$
- β) $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$
- γ) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$, δηλαδή ή θα συμβεί μόνο το A , ή μόνο το B , ή μόνο το C , ή κανένα από τα A, B, C .
- δ) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
- ε) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- στ) Θέλουμε να συμβαίνουν το πολύ δύο από τα A, B, C , δηλαδή να μη συμβαίνουν και τα 3 ενδεχόμενα μαζί. Άρα το ενδεχόμενο αυτό είναι το σύνολο $(A \cap B \cap C)^c$.
- ζ) $A \cap B \cap C$
- η) $A \cap B \cap C^c$
- θ) $A \cap B^c \cap C^c$

$$\iota) (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$$

$$\kappa) \Omega$$

Άσκηση 2

Τρεις παίκτες A, B και C ρίχνουν με αυτή τη σειρά ένα κέρμα. Ο πρώτος που θα φέρει κορώνα κερδίζει (οπότε και το παιχνίδι τελειώνει). Δώστε μια περιγραφή του δειγματικού χώρου Ω για αυτό το πείραμα τύχης. Με βάση την περιγραφή σας ορίστε τα ακόλουθα γεγονότα στον Ω :

$$\alpha) A = \{\text{Κερδίζει ο } A\}$$

$$\beta) B = \{\text{Κερδίζει ο } B\}$$

$$\gamma) (A \cup B)^c$$

Λύση

Ο δειγματοχώρος του πειράματος μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$\Omega = \{\underbrace{000}_{000} \underbrace{000}_{000} 0 \cdots 00 \cdots, \quad 1, \quad 01, \quad 001, \quad \underbrace{000}_{000} 1, \quad \underbrace{000}_{000} 01, \quad \underbrace{000}_{000} 001 \dots\}$$

(Το 0 αναπαριστά τα γράμματα και το 1 την κορώνα στην εκάστοτε ρίψη.)

$\alpha)$ Με βάση την παραπάνω περιγραφή το γεγονός A ορίζεται ως:

$$A = \{1, \quad \underbrace{000}_{000} 1, \quad \underbrace{000}_{000} \underbrace{000}_{000} 1, \quad \dots\}$$

$\beta)$ Το γεγονός B ως:

$$B = \{01, \quad \underbrace{000}_{000} 01, \quad \underbrace{000}_{000} \underbrace{000}_{000} 01, \quad \dots\}$$

$\gamma)$ Μας ζητείται να ορίσουμε το γεγονός να μην κερδίσει κανένας ή να κερδίσει ο παίκτης C . (Κάντε το διάγραμμα Venn για να το δείτε σχηματικά). Έχουμε λοιπόν:

$$(A \cup B)^c = \{\underbrace{000}_{000} \underbrace{000}_{000} 0 \cdots 00 \cdots, \quad 001, \quad \underbrace{000}_{000} 001, \quad \underbrace{000}_{000} \underbrace{000}_{000} 001, \quad \dots\}$$

Άσκηση 3

Ρίχνουμε ένα ζάρι. Έστω A το σύνολο των ενδεχομένων να έρθει περιττός αριθμός και B το σύνολο των ενδεχομένων να έρθει αριθμός μικρότερος του 4. Υπολογίστε τα σύνολα των δύο πλευρών της ισότητας

$$(A \cap B)^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c)$$

και εξακριβώστε ότι ισχύει.

Λύση

Έχουμε $A = \{1, 3, 5\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$.

- $A \cap B = \{1, 3\}$, άρα το πρώτο μέρος της ισότητας ισούται με

$$(A \cap B)^c = \{2, 4, 5, 6\}.$$

- $A^c = \{2, 4, 6\}$, $B^c = \{4, 5, 6\}$, άρα το δεύτερο μέρος της ισότητας ισούται με

$$(A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c) = \{2\} \cup \{4, 6\} \cup \{5\} = \{2, 4, 5, 6\}.$$

Άρα ισχύει η ισότητα της εκφώνησης.

Άσκηση 4

Ρίχνουμε δύο φορές ένα δίκαιο εξαέδρο ζάρι.

- Περιγράψτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.
- Ονομάζουμε A το γεγονός ότι η πρώτη ρίψη φέρνει αριθμό μικρότερο από 3. Περιγράψτε το γεγονός A και υπολογίστε την πιθανότητά του, $P(A)$.
- Ονομάζουμε B το γεγονός ότι το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι ίσο με 4. Περιγράψτε το γεγονός B και υπολογίστε την πιθανότητά του, $P(B)$.
- Ποιο είναι το ενδεχόμενο $A \cap B$;

Λύση

- Μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε απλό ενδεχόμενο χρησιμοποιώντας ένα διατεταγμένο ζεύγος (a, b) όπου a και b είναι οι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν τα αποτελέσματα της 1ης και της 2ης ρίψης αντίστοιχα. Έτσι ο δειγματικός χώρος του πειράματος εκφράζεται ως

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\}$$

ή πιο απλά και αναλυτικά

$$\Omega = \{(a, b) : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6\}$$

- Αντίστοιχα το γεγονός $A = \{ \text{Η 1η ρίψη φέρνει αριθμό μικρότερο από 3} \}$ περιγράφεται ως

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$$

ή

$$A = \{(a, b) : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 6\}$$

Αφού τα ζάρια είναι δίκαια, όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα άρα

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

- Το γεγονός $B = \{ \text{Το άθροισμα των 2 ρίψεων είναι ίσο με 4} \}$ περιγράφεται ως

$$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$\delta) A \cap B = \{(1, 3), (2, 2)\}.$$

Άσκηση 5

Ο εκφωνητής του δελτίου καιρού δίνει τις ακόλουθες πιθανότητες για τον καιρό τις επόμενες δύο μέρες:

α) βροχή σήμερα: 0.3

β) βροχή αύριο: 0.5

γ) βροχή και σήμερα και αύριο: 0.2

δ) βροχή σήμερα ή αύριο: 0.7

Είναι αυτό το δελτίο καιρού συμβατό με τα Αξιώματα των Πιθανοτήτων;

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα $A = \{\text{θα βρέξει σήμερα}\}$ και $B = \{\text{θα βρέξει αύριο}\}$.

Άρα, σύμφωνα με τα δεδομένα της εκφώνησης έχουμε $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.2$ και $P(A \cup B) = 0.7$.

Πρέπει

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6 \neq 0.7 = P(A \cup B).$$

Άρα αυτό το δελτίο καιρού δεν είναι συμβατό με τα αξιώματα των πιθανοτήτων.