

Άσκηση 1

Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

- α) Βρείτε τη σταθερά c .
- β) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ της τυχαίας μεταβλητής X .
- γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > 2)$.
- δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X = 2.5)$.

Λύση

- α) Εφόσον η $f_X(x)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$.
Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^3 \frac{c}{x^2} dx + \int_3^{+\infty} 0 dx = c \int_1^3 x^{-2} dx \\ &= c \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^3 = c \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2c}{3} = 1 \\ \Rightarrow c &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Άρα

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2x^2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- β) Η α.σ.κ. θα είναι ίση με

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dt = 0, & x < 1 \\ \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^x \frac{3}{2t^2} dt = \frac{3}{2} [-t^{-1}]_1^x = \frac{3(x-1)}{2x}, & 1 \leq x \leq 3 \\ \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^3 \frac{3}{2t^2} dt + \int_3^x 0 dt = 0 + 1 + 0 = 1, & x > 3 \end{cases}$$

- γ) Θα ισχύει ότι

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \frac{3(2-1)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

- δ) Αφού η σ.π.π. είναι μια συνεχής συνάρτηση, η πιθανότητα η τ.μ. X να πάρει μια συγκεκριμένη τιμή είναι 0. Άρα $P(X = 2.5) = 0$.

Άσκηση 2

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται απ' τον τύπο

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(1 - 0.1|x|), & |x| \leq 10 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

α) Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς α .

β) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X .

Λύση

α) Βγάζοντας την απόλυτη τιμή, η σ.π.π. δίνεται απ' τον τύπο

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(1 + 0.1x), & -10 \leq x \leq 0 \\ \alpha(1 - 0.1x), & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$\alpha \int_{-10}^0 (1 + 0.1x) dx + \alpha \int_0^{10} (1 - 0.1x) dx = 1$$

$$\alpha \left(\left[x + 0.1 \frac{x^2}{2} \right]_{-10}^0 + \left[x - 0.1 \frac{x^2}{2} \right]_0^{10} \right) = 1$$

$$10\alpha = 1$$

$$\alpha = 0.1$$

β)

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \\ &= 0.1 \int_{-10}^0 x(1 + 0.1x) dx + 0.1 \int_0^{10} x(1 - 0.1x) dx \\ &= \left[0.1 \frac{x^2}{2} \right]_{-10}^0 + \left[(0.1)^2 \frac{x^3}{3} \right]_{-10}^0 + \left[0.1 \frac{x^2}{2} \right]_0^{10} - \left[(0.1)^2 \frac{x^3}{3} \right]_0^{10} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 &= 0.1 \int_{-10}^0 x^2(1 + 0.1x) dx + 0.1 \int_0^{10} x^2(1 - 0.1x) dx - 0 \\ &= \left[0.1 \frac{x^3}{3} \right]_{-10}^0 + \left[(0.1)^2 \frac{x^4}{4} \right]_{-10}^0 + \left[0.1 \frac{x^3}{3} \right]_0^{10} - \left[(0.1)^2 \frac{x^4}{4} \right]_0^{10} \\ &= \frac{50}{3} \approx 16.67 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - (x+1) \cdot e^{-x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

α) Δείξτε ότι η $F_X(x)$ είναι πράγματι αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

β) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(X > 5)$ και $P(2 < X \leq 4)$.

Λύση

α) Παραγωγίζοντας την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, παίρνουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ xe^{-x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

Ισχύει ότι $f_X(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx + \int_0^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = \\ &= [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x}{e^x}\right) - 0 \right) + [-e^{-x}]_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{e^x}\right) + (-0 + 1) = 1. \end{aligned}$$

Άρα η $F_X(x)$ είναι πράγματι αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

β) Έχουμε

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_X(5) = 1 - (1 - 6e^{-5}) = 6e^{-5}$$

και

$$P(2 < X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = F_X(4) - F_X(2) = 1 - 5e^{-4} - 1 + 3e^{-2} = -5e^{-4} + 3e^{-2}.$$

Άσκηση 4

Αν η διάρκεια ζωής μιας ηλεκτρικής συσκευής σε χρόνια είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{20}$, βρείτε την πιθανότητα η συσκευή να λειτουργεί:

α) το πολύ 15 χρόνια,

β) ακριβώς 15 χρόνια,

γ) τουλάχιστον 15 χρόνια,

δ) πάνω από 10 και κάτω από 14 χρόνια.

Λύση

Έστω X τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τα χρόνια ζωής της ηλεκτρικής συσκευής.

$$\alpha) P(X \leq 15) = F_X(15) = 1 - e^{-\frac{15}{20}} = 1 - e^{-\frac{3}{4}}$$

$$\beta) P(X = 15) = 0$$

$$\gamma) P(X \geq 15) = P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - (1 - e^{-\frac{3}{4}}) = e^{-\frac{3}{4}}$$

$$\delta) P(10 \leq X \leq 14) = P(X \leq 14) - P(X \leq 10) = F_X(14) - F_X(10) = 1 - e^{-\frac{14}{20}} - (1 - e^{-\frac{10}{20}}) = -e^{-\frac{7}{10}} + e^{-\frac{1}{2}}$$