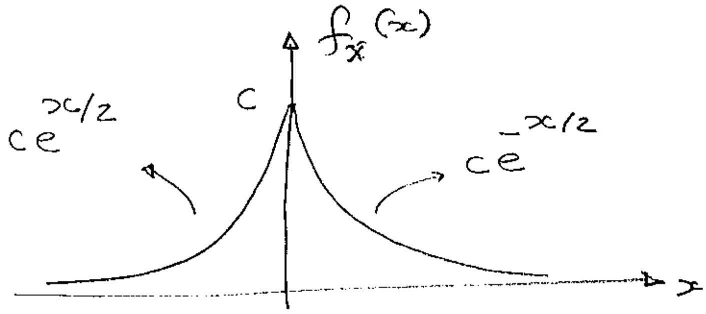
ΗΥ-217 ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
17-1-2020, ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1º

(α) $$f_X(x) = c e^{-|x|/2} = \begin{cases} c e^{x/2}, & x<0 \\ c e^{-x/2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Η κατανομή αυτή είναι γνωστή ως "διπλή εκθετική" ("double exponential") ή Laplace. Προφανώς είναι συμμετρική ως προς το 0.



Για τον υπολογισμό του c, πρέπει να ισχύει: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

Έχουμε:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} c e^{x/2} dx + \int_{0}^{+\infty} c e^{-x/2} dx$$
$$= 2c e^{x/2}\Big|_{-\infty}^{0} - 2c e^{-x/2}\Big|_{0}^{+\infty} = 2c - 0 - (0-2c) = 4c = 1$$

$$\therefore \boxed{c = 1/4}$$

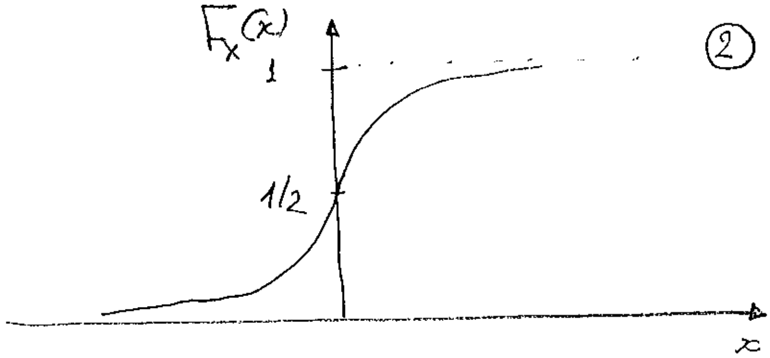
Συνεπώς
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{x/2}, & x<0 \\ \frac{1}{4} e^{-x/2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

(β) Εξ ορισμού $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$.

- Για $x \leq 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{4} e^{t/2} dt = \frac{1}{2} e^{t/2}\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2} e^{x/2}$
- Για $x > 0$, $F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4} e^{t/2} dt}_{1/2} + \int_{0}^{x} \frac{1}{4} e^{-t/2} dt$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t/2}\Big|_{0}^{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-x/2} + \frac{1}{2}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} e^{-x/2}$$

$$\therefore\ F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x/2}, & x\le 0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x/2}, & x>0\end{cases}$$



(γ) · $P(|X|\geqslant 0.4)=1-P(|X|<0.4)=1-P(-0.4<X<0.4)$

$$=1-\left[F_X(0.4)-F_X(-0.4)\right]=1-\left[1-\frac{1}{2}e^{-0.4/2}-\frac{1}{2}e^{-0.4/2}\right]$$

$$=e^{-0.4/2}=e^{-0.2}=\underline{0.8187}$$

· $P(X=0.5)=0$ καθώς η τμ X είναι συνεχής.

(δ) Προφανώς, το πεδίο τιμών της τμ $Y=X^2$ είναι το $[0,+\infty)$.

Στο μάθημα δείξαμε ότι για $y\geqslant 0$:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})=\left(1-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}/2}\right)-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}/2}=1-e^{-\sqrt{y}/2}$$

Συνεπώς: $$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 1-e^{-\sqrt{y}/2}, & y\geqslant 0\end{cases}$$

(ε) $$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{4\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}/2}\ ;\ y\geqslant 0$$

(ϛ) · $P(Y<0.5)=F_Y(0.5)=1-e^{-\sqrt{0.5}/2}=\underline{0.2978}$

· $P(Y\geqslant -0.5)=1$ καθώς η τμ Y παίρνει μη αρνητικές τιμές.

□

ΘΕΜΑ 2ο

Ορίζουμε την τ.μ. X ως τη διάρκεια ζωής του εξαρτήματος. Επίσης ορίζουμε τα γεγονότα:

$A = \{$ το εξάρτημα προέρχεται από τη γραμμή παραγωγής #1 $\}$

$B = \{$ -"- -"- -"- #2 $\}$

$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

Από την Εκφώνηση μας δίδονται οι δεσμευμένες κατανομές της τ.μ. X, δεδομένων των γεγονότων A, B:

$$f_{X/A}(x) \sim U[0, 3] \quad , \quad f_{X/B}(x) \sim \exp(\lambda = 0.2)$$

$$f_{X/A}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \qquad f_{X/B}(x) = 0.2\, e^{-0.2x}, \quad x \ge 0$$

$$F_{X/A}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/3 & 0 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases} \qquad F_{X/B}(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-0.2x} & , x \ge 0 \end{cases}$$

(α) Καθώς το εξάρτημα συνεχίζει να λειτουργεί μετά από 4 χρόνια, με βεβαιότητα προέρχεται από τη γραμμή παραγωγής #2.

Επομένως, $P(X \ge 4+2 \,/\, X \ge 4) = P(X \ge 6 \,/\, X \ge 4) = \dfrac{P(X \ge 6 \cap X \ge 4)}{P(X \ge 4)}$

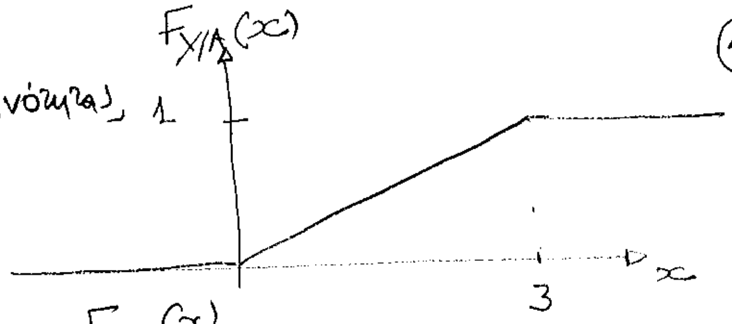
$$= \frac{P(X \ge 6)}{P(X \ge 4)} = \frac{1 - P(X < 6)}{1 - P(X < 4)} = \frac{1 - F_{X/B}(6)}{1 - F_{X/B}(4)} = \frac{e^{-0.2 \times 6}}{e^{-0.2 \times 4}} = e^{-0.2 \times 2}$$

$$= e^{-0.4} = \underline{\underline{0.6703}}.$$

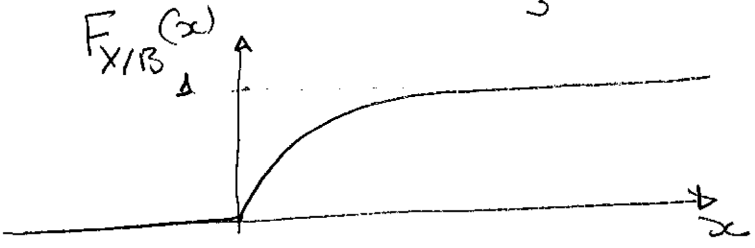
[Εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα έλλειψης μνήμης της εκθετικής κατανομής:

$$P(X \ge 4+2 \,/\, X \ge 4) = P(X \ge 2) = 1 - F_{X/B}(2) = e^{-0.2 \times 2} = 0.6703 \ ]$$

(β) Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, έχουμε ότι:



$$F_X(x) = P(A)\cdot F_{X/A}(x) + P(B)\, F_{X/B}(x)$$



$$= \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\left(1-e^{-0.2x}\right), & 0\le x<3 \\ \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\left(1-e^{-0.2x}\right), & x\ge 3 \end{cases}$$

Επομένως, $P(X>1+2 / X\ge 1) = \dfrac{P(X\ge 3 \cap X\ge 1)}{P(X\ge 1)} = \dfrac{P(X\ge 3)}{P(X\ge 1)}$

$$= \frac{1-F_X(3)}{1-F_X(1)} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\frac{3}{3}+\frac{1}{2}\left(1-e^{-0.2\times 3}\right)\right)}{1-\left[\frac{1}{2}\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(1-e^{-0.2\times 1}\right)\right]} = \underline{\underline{0.3695}}$$

□

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ } 3^{ο}}$ (α) Η πιθανότητα, P, μία σωλήνα να είναι εκτός προδιαγραφών είναι $1-P(|X-10|\le 0.1)$. Έχουμε:

$$P = 1-P(-0.1\le X-10\le 0.1) = 1-P\left(\frac{-0.1}{0.1}\le\frac{X-10}{0.1}\le\frac{0.1}{0.1}\right)$$

$$= 1-\left[\Phi(1)-\Phi(-1)\right] = 1-\left[\Phi(1)-\left(1-\Phi(1)\right)\right]$$

$$= 2-2\Phi(1) = 2-2\times 0.8413 = \underline{0.3174}$$

Έστω X το πλήθος των σωλήνων (σε ένα δείγμα 5 σωλήνων) που είναι ελαττωματικές. Τότε, $X \sim \Delta(n=5,\ p=0.3174)$

Επομένως, $P(X=3) = \binom{5}{3}\, 0.3174^{3}\,(1-0.3174)^{5-3}$

$$= \underline{\underline{0.1490}}$$

(β) Θέλουμε $1-P(-0.1 \le X-10 \le 0.1) = 0.06$

$\therefore \quad P(-0.1 \le X-10 \le 0.1) = 0.94$

$\therefore \quad P\left(\frac{-0.1}{\sigma} \le \frac{X-10}{\sigma} \le \frac{0.1}{\sigma}\right) = 0.94$

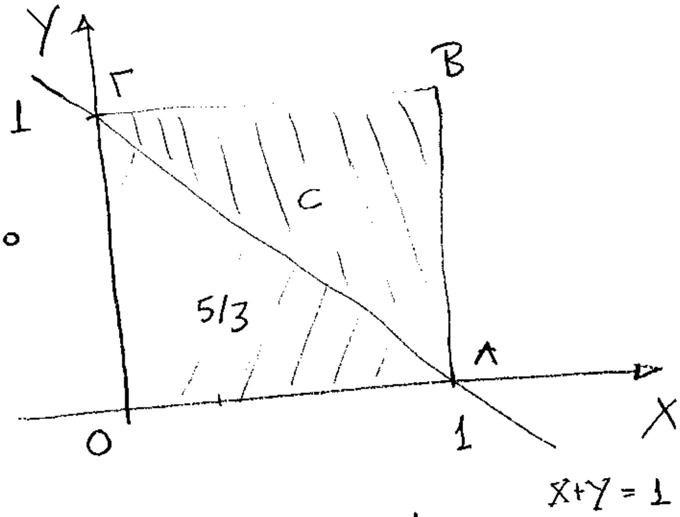
$\therefore \quad \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{0.1}{\sigma}\right) = 0.94$

$\therefore \quad \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)\right] = 0.94$

$\therefore \quad 2\,\Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) - 1 = 0.94$

$\therefore \quad \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) = 0.97 \quad \Rightarrow \quad \frac{0.1}{\sigma} = 1.88 \Rightarrow \underline{\sigma = 0.0532}$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ } 4^{\text{ο}}}$



(α) Οι τ.μ. X, Y παίρνουν τιμές στο γραμμοσκιασμένο τετράγωνο του σχήματος. Από τη σχέση κανονικοποίησης πρέπει:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{3} E_{OA\Gamma} + c\, E_{AB\Gamma} = 1 \Rightarrow \frac{5}{3}\,\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + c\,\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{3} = 0.333}$$

(β) Η τ.μ. X παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} \frac{5}{3}\,dy + \int_{1-x}^{1} \frac{1}{3}\,dy$$

$$= \frac{5}{3}\, y\Big|_0^{1-x} + \frac{1}{3}\, y\Big|_{1-x}^{1} = \frac{5}{3}(1-x-0) + \frac{1}{3}\left(1-(1-x)\right)$$

$$\therefore \quad f_X(x) = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}x \quad ; \quad 0 \le x \le 1$$

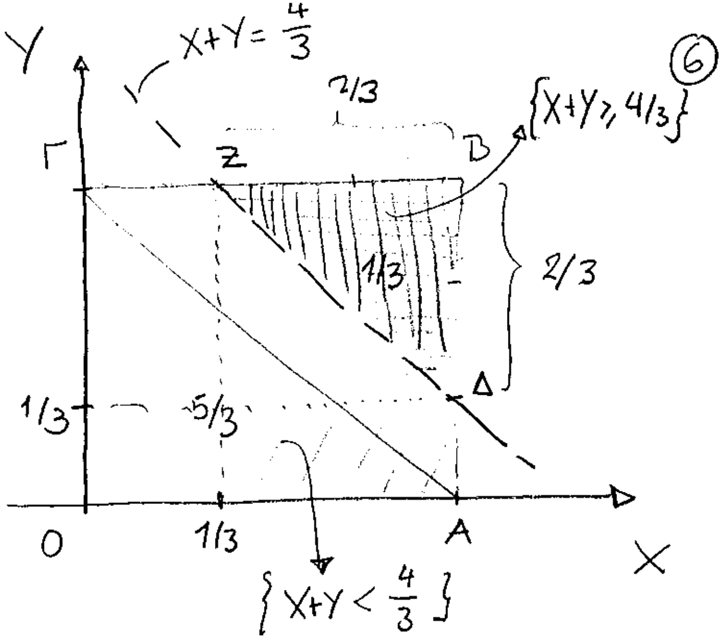
(γ)

$$P\left(X+Y<\frac{4}{3}\right)=1-P\left(X+Y\geq\frac{4}{3}\right)$$

$$=1-\frac{1}{3}E_{\Delta BZ}$$

$$=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=1-\frac{2}{27}=\underline{\underline{0.9259}}\,.$$



(δ)

$$P(X^2+Y^2\leq 1)=$$

$$\frac{5}{3}E_{OA\Gamma}+\frac{1}{3}E_{AH\Gamma}$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{3}\left[\frac{\pi\cdot 1^2}{4}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right]$$

$$=\underline{\underline{0.9285}}\,.$$