

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
17 Ιανουαρίου 2020 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 30 μονάδες. Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = ce^{-\frac{|x|}{2}} \quad -\infty < x < +\infty, \quad c : \text{σταθερά.}$$

- (α) Να δώσετε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. και να υπολογίσετε τη σταθερά c .
- (β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της τ.μ. X και δώστε την γραφική της παράσταση.
- (γ) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(|X| \geq 0.4)$ και $P(X = 0.5)$.
- (δ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $Y = X^2$.
- (ε) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $Y = X^2$.
- (ζ) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(Y < 0.5)$ και $P(Y \geq -0.5)$.

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Ένα εργοστάσιο παράγει εξαρτήματα σε δύο γραμμές παραγωγής. Οι δύο γραμμές παράγουν το ίδιο πλήθος εξαρτημάτων. Όλα τα εξαρτήματα μοιάζουν εξωτερικά μεταξύ τους, αλλά η διάρκεια ζωής ενός εξαρτήματος που προέρχεται από τη γραμμή #1 είναι ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ 0 και 3 ετών ενώ η διάρκεια ζωής ενός εξαρτήματος που προέρχεται από τη γραμμή #2 είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $\lambda = 0.2$ (έτη)⁻¹.

- (α) Η Σοφία αγόρασε ένα εξάρτημα το οποίο μετά από 4 χρόνια συνεχίζει να λειτουργεί. Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα ότι θα λειτουργήσει για τουλάχιστον 2 χρόνια ακόμα;
- (β) Ο Ανδρέας αγόρασε ένα εξάρτημα το οποίο μετά από 1 χρόνο συνεχίζει να λειτουργεί. Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα ότι θα λειτουργήσει για τουλάχιστον 2 χρόνια ακόμα;

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Η εσωτερική διάμετρος X (σε ίντσες) των σωλήνων από χαλκό που παράγει ένα εργοστάσιο ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 10 και διασπορά σ^2 : $X \sim N(10, \sigma^2)$. Σωλήνες με εσωτερική διάμετρο εκτός των ορίων 10 ± 0.1 ίντσες ανακυκλώνονται.

- (α) Αν $\sigma = 0.1$, να βρεθεί η πιθανότητα να ανακυκλωθούν ακριβώς 3 σωλήνες σε ένα δείγμα 5 σωλήνων.
- (β) Πόση πρέπει να είναι η τυπική απόκλιση του μήκους της εσωτερικής διαμέτρου των παραγόμενων σωλήνων έτσι ώστε η πιθανότητα ανακύκλωσης ενός σωλήνα να είναι 0.06;

Δίνεται ότι $\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(1.88)=0.97$, $\Phi(2.0)=0.9772$, $\Phi(2.2)=0.9861$, $\Phi(2.4)=0.9918$.

Θέμα 4 - 30 μονάδες. Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 5/3 & 0 \leq x < 1, \ 0 \leq y < 1, \ 0 \leq x+y < 1, \\ c & 0 \leq x < 1, \ 0 \leq y < 1, \ 1 \leq x+y < 2, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- (α) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. και υπολογίστε τη σταθερά c .
(β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ. X .
(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X+Y < 4/3)$.
(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X^2 + Y^2 \geq 1)$.