

Λύσεις Έκτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

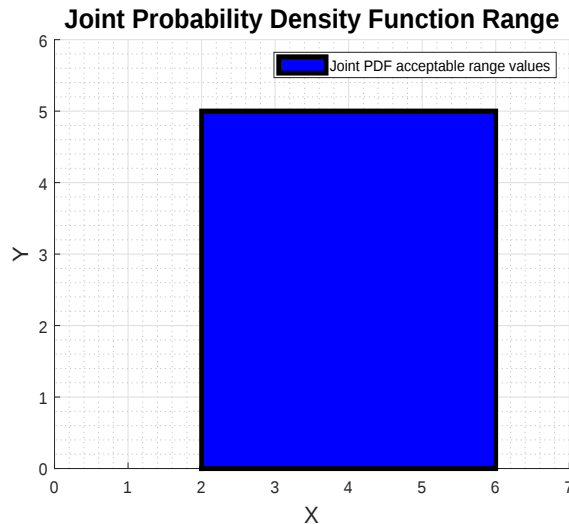
- (i) Για να αποτελεί η $f_{XY}(x, y)$ μία έγκυρη από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy dx &= 1 \Leftrightarrow \int_2^6 \int_0^5 [c(2x + y)] dy dx = 1 \Leftrightarrow c \int_2^6 \left(2x \left[y \right]_0^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^5 \right) dx = 1 \\ \Leftrightarrow c \int_2^6 \left(10x + \frac{25}{2} \right) dx &= 1 \Leftrightarrow c \left(10 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^6 + \frac{25}{2} \left[x \right]_2^6 \right) = 1 \Leftrightarrow c[10 \cdot 16 + \frac{25}{2} \cdot 4] = 1 \Leftrightarrow 210c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{210} \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_{XY}(x, y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{210}(2x + y) & 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας τα επιτρεπτά πεδία τιμών των Τ.Μ. X, Y , λαμβάνουμε την γραφική παράσταση του συνόλου τιμών της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας (περιορισμένη στο διάστημα $[0, 7] \times [0, 6]$) που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σύνολο Τιμών της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{XY}(x, y)$.

- (ii) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

Για $2 < x < 6$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^5 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dy = \frac{1}{210} \left(2x \left[y \right]_0^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^5 \right) = \frac{1}{210} \left(10x + \frac{25}{2} \right)$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{210} \left(10x + \frac{25}{2} \right) & 2 < x < 6 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Για $0 < y < 5$ έχουμε ότι:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_2^6 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dx = \frac{1}{210} \left(2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^6 + y \left[x \right]_2^6 \right) = \frac{1}{210} (32 + 4y)$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_Y(y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{210} (4y + 32) & 0 < y < 5 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

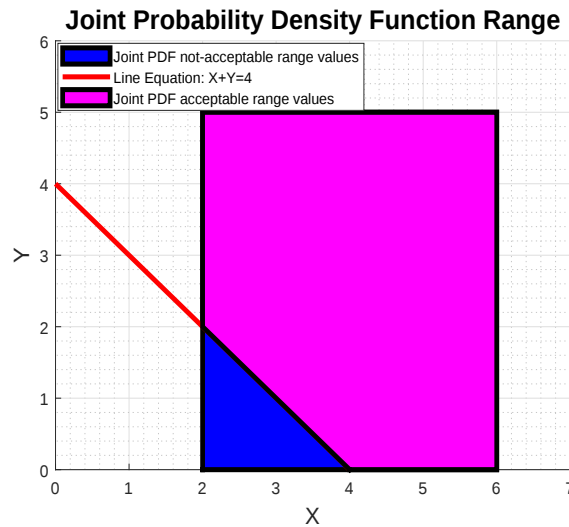
- (iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(3 < X < 4, Y > 2) &= \int_3^4 \int_2^5 f_{XY}(x, y) dy dx = \int_3^4 \int_2^5 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dy dx \\ &= \frac{1}{210} \left[\int_3^4 \left(2x \left[y \right]_2^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_2^5 \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left[\int_3^4 \left(6x + \frac{21}{2} \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left(6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_3^4 + \frac{21}{2} \left[x \right]_3^4 \right) \\ &= \frac{1}{210} \left(6 \cdot \frac{7}{2} + \frac{21}{2} \right) = \frac{1}{210} \cdot \frac{63}{2} = \frac{63}{420} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

- (iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= \int_3^6 \int_0^5 f_{XY}(x, y) dy dx = \int_3^6 \int_0^5 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dy dx \\ &= \frac{1}{210} \left[\int_3^6 \left(2x \left[y \right]_0^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^5 \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left[\int_3^6 \left(10x + \frac{25}{2} \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left(10 \left[\frac{x^2}{2} \right]_3^6 + \frac{25}{2} \left[x \right]_3^6 \right) \\ &= \frac{1}{210} \left(10 \cdot \frac{27}{2} + 3 \cdot \frac{25}{2} \right) = \frac{1}{210} \cdot \frac{345}{2} = \frac{345}{420} = \frac{23}{28} \end{aligned}$$

(v) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, με βάση το Σχήμα 2, έχουμε:



Σχήμα 2: Γραφικός υπολογισμός της $P(X + Y > 4)$.

$$\begin{aligned}
 P(X + Y > 4) &= 1 - P(X + Y \leq 4) = 1 - \int_2^4 \int_0^{4-x} f_{XY}(x, y) dy dx = 1 - \int_2^4 \int_0^{4-x} \left(\frac{1}{210} (2x + y) \right) dy dx \\
 &= 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(2x \left[y \right]_0^{4-x} + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{4-x} \right) dx \right] = 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(2x(4-x) + \frac{(4-x)^2}{2} \right) dx \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(8x - 2x^2 + \frac{x^2 - 8x + 16}{2} \right) dx \right] = 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(8x - 2x^2 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 \right) dx \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 4x + 8 \right) dx \right] = 1 - \frac{1}{210} \left(-\frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^4 + 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 + 8 \left[x \right]_2^4 \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{210} \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{56}{3} + 4 \cdot \frac{12}{2} + 8 \cdot 2 \right) = 1 - \frac{1}{210} (-28 + 24 + 16) = 1 - \frac{1}{210} \cdot 12 = \frac{198}{210} = \frac{33}{35}
 \end{aligned}$$

(vi) Παρατηρούμε ότι εν προκειμένω ισχύει η σχέση:

$$f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$$

Ως εκ τούτου, οι Τ.Μ. X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Άσκηση 2.

(i) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Για $y > 0$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_0^{+\infty} \left(y^{-1} e^{-y - \frac{x}{y}} \right) dx = \frac{e^{-y}}{y} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}} dx = \frac{e^{-y}}{y} \left[-ye^{-\frac{x}{y}} \right]_0^{+\infty} \\
 &= \frac{e^{-y}}{y} \left[-\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{e^{\frac{x}{y}}} \right) + y \right] = \frac{e^{-y}}{y} (0 + y) = e^{-y}
 \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_Y(y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (ii) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , καθώς και την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$, η δεσμευμένη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{X|Y}(x | y)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Για $x, y > 0$ έχουμε ότι:

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{y^{-1}e^{-y-\frac{x}{y}}}{e^{-y}} = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}$$

Άρα, τελικά, η δεσμευμένη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_{X|Y}(x | y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X|Y}(x | y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y} & x, y > 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (iii) Με γνωστή την δεσμευμένη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{X|Y}(x | y)$, η δεσμευμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής $F_{X|Y}(x | y)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_{X|Y}(x | y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(z | y) dz$$

Για $x, y > 0$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x | y) &= \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(z | y) dz = \int_0^x f_{X|Y}(z | y) dz = \int_0^x \frac{1}{y} e^{-\frac{z}{y}} dz \\ &= \frac{1}{y} \left[-ye^{-\frac{z}{y}} \right]_0^x = \frac{1}{y} (-ye^{-\frac{x}{y}} + y) = e^{-\frac{x}{y}} + 1 \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η δεσμευμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, $F_{X|Y}(x | y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_{X|Y}(x | y) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{y}} + 1 & x, y > 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής, έχουμε:

$$P(X > 1 | Y = y) = 1 - P(X \leq 1 | Y = y) = 1 - F_{X|Y}(1, y) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{y}}) = e^{-\frac{1}{y}}$$

(v) Για τον υπολογισμό της δεσμευμένης Μέσης Τιμής $E[X | Y = y]$, $y > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} E(X | Y = y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x | y) dx = \int_0^{+\infty} x \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} dx = \frac{1}{y} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{y}} dx \\ &= \frac{1}{y} \left(\left[-xy e^{-\frac{x}{y}} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} y e^{-\frac{x}{y}} dx \right) = \frac{1}{y} \left(0 + y \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}} dx \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}} dx = \left[-y e^{-\frac{x}{y}} \right]_0^{+\infty} = \left[-\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{e^{\frac{x}{y}}} \right) + y \right] = 0 + y = y \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

(i) Από το σχήμα που δίνεται στην εκφώνησης της Εργασίας, έχουμε:

$$E_{S_{XY}} = E - 2 \cdot E_{\text{Τετραγώνου}} = 9 - 2 \cdot 1 = 7$$

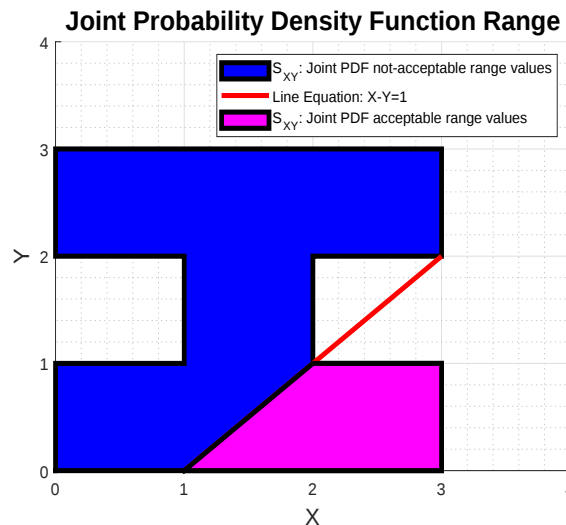
Επομένως, για την σταθερά c θα ισχύει:

$$c \cdot E_{S_{XY}} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{E_{S_{XY}}} \Leftrightarrow c = \frac{1}{7}$$

Άρα, τελικά, η από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_{XY}(x, y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & (x, y) \in S_{XY} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

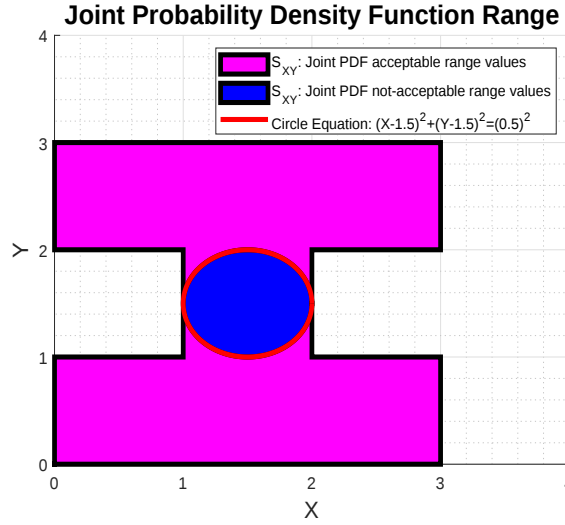
(ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, με βάση το Σχήμα 3, έχουμε:



Σχήμα 3: Γραφικός υπολογισμός της $P(Y < X - 1)$.

$$P(Y < X - 1) = c \cdot E_{\text{Τραπεζίου}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{(1+2) \cdot 1}{2} = \frac{3}{14}$$

- (iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενη πιθανότητας, ουσιαστικά χρειάζεται να υπολογίσουμε την πιθανότητα να βρεθούμε εκτός του κύκλου με κέντρο το $K(1.5, 1.5)$ και ακτίνα $\rho = 0.5$. Οπότε, με βάση το Σχήμα 4, έχουμε:



Σχήμα 4: Γραφικός υπολογισμός της $P[(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 > (0.5)^2]$.

$$\begin{aligned} P[(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 > (0.5)^2] &= 1 - P[(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 \leq (0.5)^2] = 1 - c \cdot E_{\text{Κύκλου}} \\ &= 1 - \frac{1}{7} \cdot \pi \rho^2 = 1 - \frac{1}{7} \cdot \pi (0.5)^2 = 1 - \frac{1}{7} \cdot 0.25\pi = 1 - 0.0357\pi \approx 1 - 0.1122 = 0.8878 \end{aligned}$$

- (iv) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

Για $x < 0$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = 0$$

Για $0 \leq x < 1$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^1 \frac{1}{7} dy + \int_2^3 \frac{1}{7} dy = \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_0^1 + \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_2^3 = \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{2}{7}$$

Για $1 \leq x < 2$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^3 \frac{1}{7} dy = \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_0^3 = \frac{1}{7} \cdot 3 = \frac{3}{7}$$

Για $2 \leq x < 3$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^1 \frac{1}{7} dy + \int_2^3 \frac{1}{7} dy = \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_0^1 + \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_2^3 = \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{2}{7}$$

Για $x \geq 3$ έχουμε ότι :

$$f_X(x) = 0$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{7} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{7} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{7} & 2 \leq x < 3 \\ 0 & x \geq 3 \end{cases}$$

Άσκηση 4.

- (i) Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

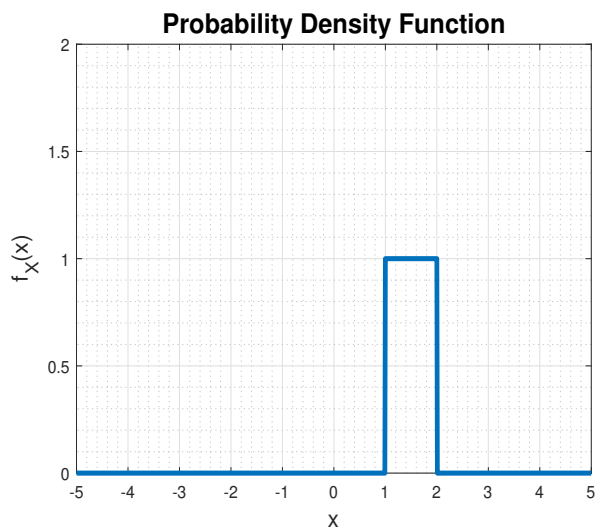
Με βάση την εκφώνηση της Άσκησης, προκύπτει ότι :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά :

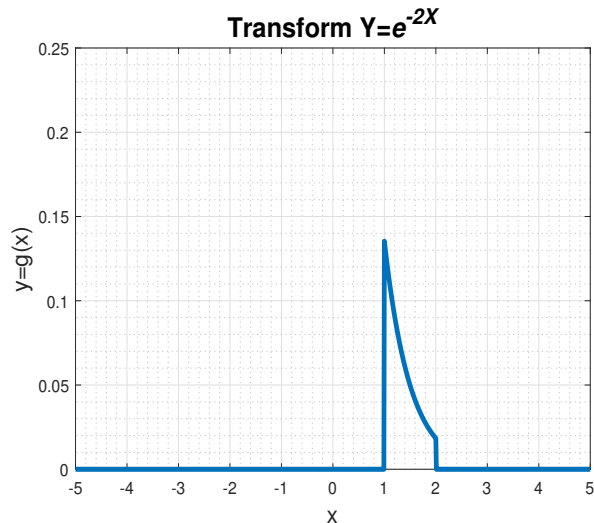
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της X , $f_X(x)$, φαίνεται στο Σχήμα 5 (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$).



Σχήμα 5: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

Η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = g(X)$ φαίνεται στο Σχήμα 6 (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$).



Σχήμα 6: Μετασχηματισμός $Y = g(X)$.

(ii) Από το Σχήμα 6 βλέπουμε ότι η Τ.Μ X παίρνει τιμές στο διάστημα $[e^{-4}, e^{-2}] = [0.019448, 0.13534]$. Άρα, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $y < e^{-4}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = 0$$

(b) Για $e^{-4} \leq y < e^{-2}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(e^{-2X} < y) = P(-2X < \ln y) = P(X > -\frac{1}{2} \ln y) = \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^{+\infty} 1 dx = \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^2 1 dx = [x]_{-\frac{1}{2} \ln y}^2 = 2 + \frac{1}{2} \ln y$$

(c) Για $y > e^{-2}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = 1$$

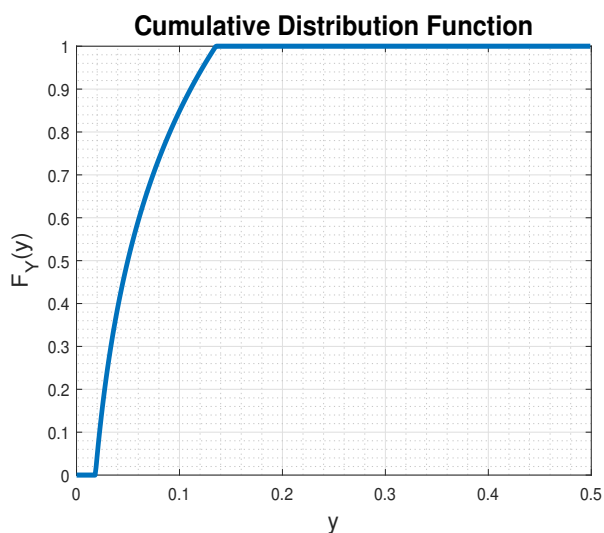
Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής της Τ.Μ. Y , $F_Y(y)$, θα είναι τελικά:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < e^{-4} \\ 2 + \frac{1}{2} \ln y & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 1 & y > e^{-2} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $F_Y(y)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[0, 0.5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 7.

(iii) Με γνωστή την Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

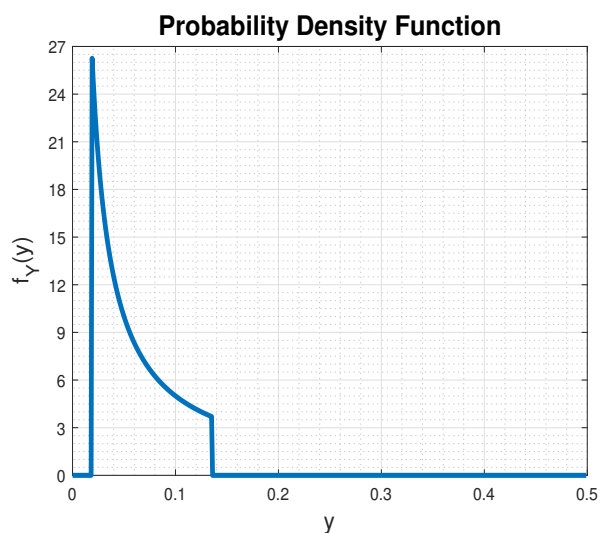


Σχήμα 7: Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής $F_Y(y)$.

Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y} & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_Y(y)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[0, 0.5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$.

(iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(Y \leq e^{-3}) = F_Y(e^{-3}) = 2 + \frac{1}{2} \ln(e^{-3}) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Άσκηση 5.

- (i) Καθώς η συνδιασπορά παραμένει αναλλοίωτη όταν προσθέτουμε μία σταθερά σε μία τυχαία μεταβλητή, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι X και Y έχουν μηδενική μέση τιμή ($E[X] = E[Y] = 0$). Ως εκ τούτου, έχουμε:

$$\begin{aligned} COV(X - Y, X + Y) &= E[(X - Y)(X + Y)] = E[X^2 + XY - YX - Y^2] \\ &= E[X^2 - Y^2] = E[X^2] - E[Y^2] \\ &= [VAR(X) + (E[X])^2] - [VAR(Y) + (E[Y])^2] \\ &= VAR[X] - VAR[Y] = 0 \end{aligned}$$

, καθώς οι X και Y έχουν την ίδια διασπορά ($VAR[X] = VAR[Y]$).

- (ii) Με βάση τον ορισμό του συντελεστή συσχέτισης των X και Y , έχουμε:

$$\rho(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{\sqrt{VAR[X]VAR[Y]}}$$

Για τον υπολογισμό της συνδιασποράς των X και Y , έχουμε:

$$\begin{aligned} COV(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] = E[X(a + bX + cX^2)] - E[X]E[a + bX + cX^2] \\ &= E[aX + bX^2 + cX^3] - E[X](a + bE[X] + cE[X^2]) \\ &= aE[X] + bE[X^2] + cE[X^3] - aE[X] - b(E[X])^2 - cE[X]E[X^2] \\ &= a \times 0 + b \times 1 + c \times 0 - a \times 0 - b \times 0^2 - c \times 0 \times 1 = b. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς των X και Y , έχουμε:

$$\begin{aligned} VAR[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = 1 - 0^2 = 1. \\ VAR[Y] &= VAR[a + bX + cX^2] = E[(a + bX + cX^2)^2] - (E[a + bX + cX^2])^2 \\ &= E[(a + bX)^2 + c^2X^4 + 2cX^2(a + bX)] - (E[a] + bE[X] + cE[X^2])^2 \\ &= E[(a + bX)^2] + c^2E[X^4] + 2cE[X^2(a + bX)] - (a + b \cdot 0 + c \cdot 1)^2 \\ &= E[a^2 + 2abX + b^2X^2] + c^2E[X^4] + 2cE[aX^2 + bX^3] - (a + c)^2 \\ &= E[a^2] + 2abE[X] + b^2E[X^2] + c^2E[X^4] + 2acE[X^2] + 2bcE[X^3] - (a + c)^2 \\ &= a^2 + 2ab \cdot 0 + b^2 \cdot 1 + c^2 \cdot 3 + 2ac \cdot 1 + 2bc \cdot 0 - (a^2 + 2ac + c^2) \\ &= a^2 + b^2 + 3c^2 + 2ac - a^2 - 2ac - c^2 = b^2 + 2c^2. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, ο συντελεστής συσχέτισης των X και Y θα είναι τελικά:

$$\rho(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{\sqrt{VAR[X]VAR[Y]}} = \frac{b}{\sqrt{1 \cdot (b^2 + 2c^2)}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}$$

Άσκηση 6.

- (i) Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$E\left[Y_i \frac{f_X(Y_i)}{f_Y(Y_i)}\right] = \int_S y \frac{f_X(y)}{f_Y(y)} f_Y(y) dy = \int_S y f_X(y) dy = E[X]$$

Άρα, τελικά, έχουμε:

$$E[Z] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \frac{f_X(Y_i)}{f_Y(Y_i)}\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left[Y_i \frac{f_X(Y_i)}{f_Y(Y_i)}\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X] = \frac{n \cdot E[X]}{n} = E[X]$$

(ii) Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $X - \lambda Y$, όπου λ είναι πραγματικός αριθμός (σταθερά).

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$0 \leq E[(X - \lambda Y)^2] \Rightarrow 0 \leq \lambda^2 E[Y^2] - 2\lambda E[XY] + E[X^2].$$

Το παραπάνω τριώνυμο ως προς λ (έστω $f(\lambda)$) έχει ελάχιστο, διότι η 2η παράγωγός του ως προς λ ($f''(\lambda) = E[Y^2]$) είναι πάντα θετική. Η τιμή του λ που το ελαχιστοποιεί προκύπτει από την εξίσωση της 1ης παραγώγου ως προς λ ($f'(\lambda)$) με το 0:

$$f'(\lambda) = 0 \Rightarrow 2\lambda E[Y^2] - 2E[XY] = 0 \Rightarrow \lambda_{min} = \frac{E[XY]}{E[Y^2]}.$$

Η αντίστοιχη ελάχιστη τιμή του τριωνύμου είναι:

$$\begin{aligned} 0 \leq E[(X - \lambda_{min} Y)^2] &\Rightarrow 0 \leq E[(X - \frac{E[XY]}{E[Y^2]} Y)^2] \Rightarrow 0 \leq E[X^2 - 2\frac{XYE[XY]}{E[Y^2]} + Y^2(\frac{E[XY]}{E[Y^2]})^2] \\ &\Rightarrow 0 \leq E[X^2] - 2\frac{E[XY]E[XY]}{E[Y^2]} + E[Y^2]\frac{(E[XY])^2}{(E[Y^2])^2} \Rightarrow 0 \leq E[X^2] - 2\frac{(E[XY])^2}{E[Y^2]} + \frac{(E[XY])^2}{E[Y^2]} \\ &\Rightarrow 0 \leq E[X^2] - \frac{(E[XY])^2}{E[Y^2]} \Rightarrow (E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2]. \end{aligned}$$