

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 10/12/2019

Ημερομηνία Παράδοσης: 20/12/2019

Άσκηση 1 Θεωρούμε τις Τ.Μ. X και Y με από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c(2x + y) & 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

, όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$.

- (i) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c .
- (ii) Να βρεθούν οι περιθώριες Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(3 < X < 4, Y > 2)$
- (iv) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 3)$
- (v) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X + Y > 4)$
- (vi) Είναι οι Τ.Μ. X και Y ανεξάρτητες;

Άσκηση 2. Θεωρούμε τις Τ.Μ. X και Y με από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} y^{-1}e^{-y-\frac{x}{y}}, & x, y > 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

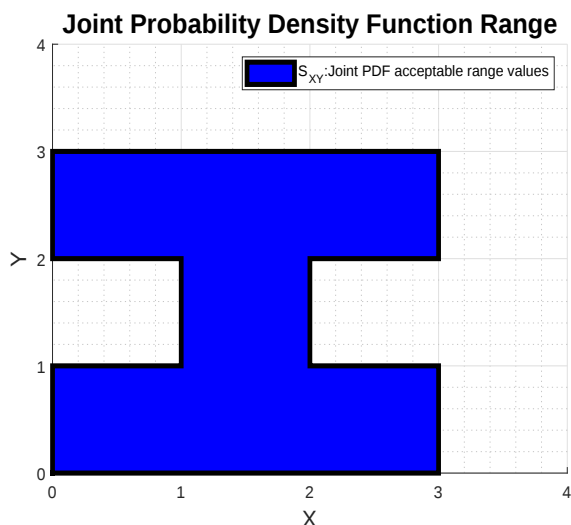
- (i) Να υπολογιστεί η περιθώρια Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$.
- (ii) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{X|Y}(x | y)$.
- (iii) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής $F_{X|Y}(x | y)$.
- (iv) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 1 | Y = y)$.
- (v) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη Μέση Τιμή $E[X | Y = y], y > 0$.

Άσκηση 3. Οι συνεχείς Τ.Μ. X και Y έχουν σύνολο τιμών το γραμμοσκιασμένο χωρίο S_{XY} που φαίνεται στο Σχήμα 1.

Οι X και Y ακολουθούν από κοινού Ομοιόμορφη Κατανομή που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in S_{XY} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

, όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$.



Σχήμα 1: Σύνολο Τιμών της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{XY}(x, y)$.

- (i) Να υπολογιστεί η σταθερά c .
- (ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Y < X - 1)$.
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P[(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 > (0.5)^2]$.
- (iv) Να υπολογιστεί η περιθώρια Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

Άσκηση 4. Θεωρούμε την T.M. X η οποία είναι ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ των τιμών 1 και 2, δηλαδή: $X \sim U[1, 2]$. Ορίζουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή ως εξής: $Y = e^{-2X}$.

- (i) Να γίνει η γραφική παράσταση της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της T.M X , $f_X(x)$, καθώς και αυτή του μετασχηματισμού $Y = e^{-2X}$.
- (ii) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής της T.M. Y , $F_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (iii) Να υπολογιστεί η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας της T.M. Y , $f_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (iv) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Y \leq e^{-3})$.

Άσκηση 5.

- (i) Υποθέστε ότι οι X και Y είναι T.M. με την ίδια διασπορά. Να αποδείξετε ότι οι $X - Y$ και $X + Y$ είναι ασυσχέτιστες.
- (ii) Υποθέστε ότι η X είναι μία T.M. για την οποία ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$E[X] = 0, E[X^2] = 1, E[X^3] = 0, E[X^4] = 3.$$

Έστω μία νέα T.M. Y , η οποία ορίζεται ως εξής:

$$Y = a + bX + cX^2$$

Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X, Y)$.

Άσκηση 6.

- (i) Έστω $Y_1, Y_1, \dots, Y_n$ ανεξάρτητες Τ.Μ., με μία κοινή και γνωστή ΣΠΠ, f_Y . Έστω ότι S είναι το σύνολο όλων των δυνατών τιμών των Y_i , $S = \{y \mid f_Y(y) > 0\}$. Έστω X μία Τ.Μ. με γνωστή ΣΠΠ, f_X , τέτοια ώστε να ισχύει $f_X(y) = 0$ για όλα τα $y \notin S$. Θεωρείστε την Τ.Μ.

$$Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \frac{f_X(Y_i)}{f_Y(Y_i)}$$

Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $E[Z] = E[X]$.

- (ii) Αν X και Y είναι 2 τυχαίες μεταβλητές, να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα *Caychy – Schwarz*:

$$(E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2].$$