

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2019-2020
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & \text{αν } 0 \leq x < 3 \\ c(6-x) & \text{αν } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

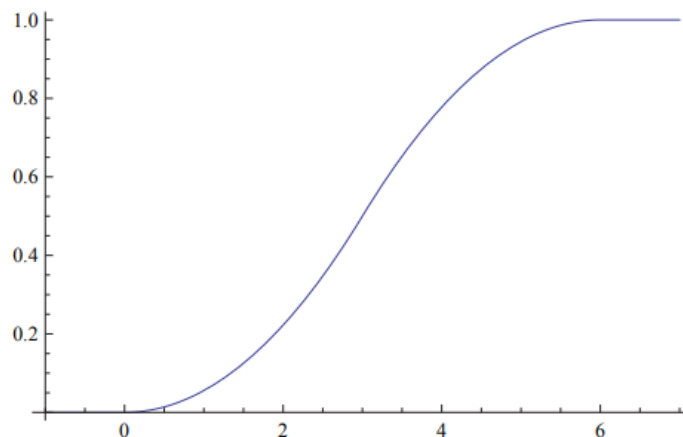
α) Προφανώς, θα πρέπει $c > 0$ (ώστε $f_X(x) \geq 0, \forall x$). Επίσης:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Rightarrow c \int_0^3 xdx + c \int_3^6 (6-x)dx = 1$$
$$c \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^3 + c(6x - \frac{1}{2}x^2) \Big|_3^6 = 1 \Rightarrow 9c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$$

β) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές είναι $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du$.
Συνεπώς:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{9} \int_0^3 udu = \frac{x^2}{18}, & 0 \leq x < 3 \\ \frac{1}{9} \int_0^3 udu + \frac{1}{9} \int_3^6 (6-u)du = 1 - \frac{(6-x)^2}{18}, & 3 \leq x < 6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$

γ) Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$ φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$.

Είναι εύκολα αντιληπτό ότι η $F_X(x)$ είναι μη φθίνουσα και ότι $0 \leq F_X(x) \leq 1$ για κάθε τιμή του x , τόσο από το παραπάνω σχήμα όσο και από την ανάλυση των συναρτήσεων $\frac{x^2}{18}$ και $1 - \frac{(6-x)^2}{18}$ στα διαστήματα $[0, 3)$ και $[3, 6)$, αντίστοιχα. Επιπλέον, ισχύει ότι: $F_X(-\infty) = F_X(0) = 0$ και $F_X(+\infty) = F_X(6) = 1$. Τέλος, είναι εύκολα αντιληπτό ότι η $F_X(x)$ είναι συνεχής παντού, ακόμη και στα σημεία $x = 0, x = 3$ και $x = 6$.

δ) Έχουμε ότι:

$$P(A) = P(X > 3) = 1 - F_X(3) = 0.5$$

και

$$P(B) = P(1.5 \leq X \leq 9) = F_X(9) - F_X(1.5) = 1 - 0.125 = 0.875$$

ε) Η τομή των γεγονότων A και B είναι το γεγονός $A \cap B = \{3 < X \leq 9\}$ και

$$P(A \cap B) = P(3 < X \leq 9) = P(X > 3) = 0.5 = P(A) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Οπότε τα γεγονότα A, B δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 2.

α) Έχουμε

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \leq w) = P(\min\{X, Y, Z\} \leq w) = 1 - P(\min\{X, Y, Z\} > w) = \\ &= 1 - P(X > w, Y > w, Z > w) = 1 - P(X > w)P(Y > w)P(Z > w) = \\ &= 1 - (1 - P(X \leq w))(1 - P(Y \leq w))(1 - P(Z \leq w)) = 1 - (1 - F(w))(1 - F(w))(1 - F(w)) = \\ &= 1 - (1 - F(w))^3 = \begin{cases} 0 & , w < 0 \\ 1 - e^{-w^9} & , w \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

β) Παραγωγίζοντας την αθροιστική συνάρτηση κατανομής που υπολογίσαμε παραπάνω, παίρνουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής W :

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & , w < 0 \\ 9w^8 e^{-w^9} & , w \geq 0 \end{cases}$$

Άσκηση 3.

α) Η πιθανότητα για οποιοδήποτε γεγονός να συμβεί ισούται με το εμβαδόν κάτω από την σ.π.π.. Παρατηρούμε ότι $X^2 - 12X + 35 = (X - 5)(X - 7)$. Οπότε, $X^2 - 12X + 35 > 0$ αν και μόνο αν $\{X > 7\} \cup \{X < 5\}$. Εφόσον $X \sim U[2, 10]$, $f_X(x) = \frac{1}{8}$ για $x \in [2, 10]$ και $f_X(x) = 0$ αλλού. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X^2 - 12X + 35 > 0) &= P(\{X > 7\} \cup \{X < 5\} \cap \{2 \leq X \leq 10\}) = \\ &= P(\{2 \leq X < 5\} \cup \{7 < X \leq 10\}) = P(\{2 \leq X < 5\}) + P(\{7 < X \leq 10\}) = \\ &= \frac{1}{8}(5 - 2) + \frac{1}{8}(10 - 7) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 0.75. \end{aligned}$$

β)

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y)$$

Άρα

$$f_Y(y) = f_X(y) - f_X(-y) \cdot (-y)' = f_X(y) + f_X(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Άσκηση 4.

α)

$$P(X > \frac{1}{2}) = 1 - P(X \leq \frac{1}{2}) = 1 - F_X(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

β)

$$P(-\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4}) = P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4}) = F_X(\frac{3}{4}) - F_X(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

γ)

$$P(|X| \leq \frac{1}{2}) = P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) - F_X(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

δ) Αφού $F_X(1) = 1$, πρέπει να έχουμε $\alpha \leq 1$. Άρα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση

$$P(X \leq \alpha) = F_X(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{2} = 0.8 \Rightarrow \alpha = 0.6$$

Άσκηση 5.

α) Ορίζουμε την τ.μ. X_k ως την παραγωγή της k -οστής γραμμής. Συνεπώς, $X_k \sim \exp(1/5)$ καθώς μας δίδεται ότι $E[X_k] = 5$ και ισχύει ότι $\lambda_k = \frac{1}{E[X_k]}$.

$$P(X_k > 4) = \int_4^{+\infty} f_{X_k}(x)dx = \int_4^{+\infty} \frac{1}{5}e^{-x/5}dx = -e^{-x/5}\Big|_4^{+\infty} = e^{-4/5} = 0.45$$

β) Έστω K το πλήθος των γραμμών επεξεργασίας με παραγωγή περισσότερους από 4 τόνους. Τότε, προφανώς, $K \sim \Delta(n=3, p=0.45)$.

Συνεπώς,

$$P(K=2) = \binom{3}{2} 0.45^2 (1-0.45)^{3-2} = 0.334$$

γ) $P(E) = P(K \geq 1) = 1 - P(K=0) = 1 - (1-0.45)^3 = 0.834$

δ) Έστω M το πλήθος των ημερών (από τις 100) που παρατηρήθηκε το γεγονός E . Τότε,

$$M \sim \Delta(n=100, p=0.834) \text{ και } P(M > 55) = \sum_{m=56}^{100} \binom{100}{m} 0.834^m (1-0.834)^{100-m}$$

Άσκηση 6. Ισχύει ότι $X \sim N(500, 25)$, άρα $Z = \frac{X-500}{5} \sim N(0, 1)$.

α) Έχουμε

$$P(X \geq 490) = P\left(\frac{X - 500}{5} \geq \frac{490 - 500}{5}\right) = P(Z \geq -2) = 1 - P(Z \leq -2) = 1 - \Phi(-2) = 0.9772$$

Επομένως

$$P(1 \text{ από τα } 3 \text{ πακέτα έχει βάρος } \geq 490) = \binom{3}{1} (0.9772)^1 (1 - 0.9772)^2 = 0.001524$$

β) Έχουμε

$$\begin{aligned} P(490 \leq X \leq 505) &= P\left(\frac{490 - 500}{5} \leq \frac{X - 500}{5} \leq \frac{505 - 500}{5}\right) = P(-2 \leq Z \leq 1) = \\ &= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 = 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185 \end{aligned}$$

Επομένως

$$P(\text{και τα } 3 \text{ πακέτα είναι μεταξύ } 490 \text{ και } 505 \text{ γρ.}) = (0.8185)^3 = 0.54837$$

Άσκηση 7.

Έστω η τ.μ. X που αναπαριστά την εσωτερική διάμετρο των σωληνών. Τότε $X \sim N(10, \sigma^2)$. Η πιθανότητα ανακύκλωσης των σωληνών είναι

$$\begin{aligned} p &= P(\{X > 10.1\} \cup \{X < 9.9\}) = 1 - P(9.9 < X < 10.1) \\ &= 1 - P\left(\frac{9.9 - 10}{\sigma} < \frac{X - 10}{\sigma} < \frac{10.1 - 10}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) + \Phi\left(-\frac{0.1}{\sigma}\right) \\ &= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)\right) \end{aligned}$$

α) Η πιθανότητα ανακύκλωσης είναι

$$p = 2(1 - \Phi(1)) = 2(1 - 0.8413) = 0.3174.$$

Έστω Y η τ.μ. που αναπαριστά τον αριθμό των σωληνών από το δείγμα των 5 σωληνών που ανακυκλώνονται. Ισχύει ότι $Y \sim \Delta(n = 5, p = 0.3174)$. Τότε,

$$P(Y = 3) = \binom{5}{3} (0.3174)^3 (1 - 0.3174)^2 \cong 0.149.$$

β) Θα πρέπει

$$p = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)\right) = 0.06 \Rightarrow \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) = 0.97 \cong \Phi(1.88).$$

Άρα,

$$\frac{0.1}{\sigma} = 1.88 \Rightarrow \sigma = 0.053 \Rightarrow \sigma^2 = 0.002809.$$