

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2019-2020
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 26/11/2019

Ημερομηνία Παράδοσης: 10/12/2019

Άσκηση 1. Η ποσότητα ψωμιού (σε εκατοντάδες κιλά) που πουλάει ένα αρτοποιείο κατά τη διάρκεια μιας ημέρας είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x < 3 \\ c(6-x) & 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c .
- β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, της τ.μ. X .
- γ) Δώστε τη γραφική παράσταση της $F_X(x)$ και δείξτε ότι είναι μία έγκυρη αθροιστική συνάρτηση κατανομής.
- δ) Ποια η πιθανότητα ότι σε μία ημέρα θα πουληθούν: (i) περισσότερα από 300 κιλά ψωμί, (ii) μεταξύ 150 και 900 κιλών ψωμί;
- ε) Αν A και B είναι τα γεγονότα (i) και (ii), αντίστοιχα, είναι τα A και B ανεξάρτητα;

Άσκηση 2. Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y, Z είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-x^3} & , x \geq 0 \end{cases}$$

- α) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $W = \min\{X, Y, Z\}$.
- β) Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής W .

Άσκηση 3.

- α) Δίδεται η τυχαία μεταβλητή X , η οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[2, 10]$. Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $X^2 - 12X + 35 > 0$.
- β) Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την $N(0, 1)$. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = |X|$.

Άσκηση 4. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x+1}{2}, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

- α) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > \frac{1}{2})$.
- β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(-\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4})$.
- γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(|X| \leq \frac{1}{2})$.
- δ) Ποια είναι η τιμή του α ώστε να ισχύει $P(X \leq \alpha) = 0.8$;

Άσκηση 5. Ένα εργοστάσιο ζάχαρης έχει τρεις γραμμές επεξεργασίας. Η ποσότητα ζάχαρης που παράγεται από κάθε γραμμή επεξεργασίας είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 5 (τόνους). Υποθέτουμε επίσης, ότι κάθε γραμμή λειτουργεί ανεξάρτητα από τις άλλες.

- α) Υπολογίστε την πιθανότητα μία τυχαία γραμμή να παράγει περισσότερες από 4 τόνους ζάχαρης;
- β) Ποια η πιθανότητα 2 ακριβώς από τις 3 γραμμές να παράγουν περισσότερους από 4 τόνους ζάχαρης;
- γ) Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον μία από τις γραμμές να παράγει περισσότερους από 4 τόνους ζάχαρης (γεγονός E);
- δ) Καταγράφουμε για ένα διάστημα 100 ημερών τις ημέρες που παρατηρείται το γεγονός E . Ποια η πιθανότητα να έχουμε καταγράψει περισσότερες από 55 μέρες;

Άσκηση 6. Η ποσότητα X του καφέ που βρίσκεται σε πακέτα των 500 γρ. είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 500 και διασπορά 25, $X \sim N(500, 25)$. Αγοράζουμε τρία πακέτα των 500 γρ. . Ποια είναι η πιθανότητα:

- α) ένα μόνο πακέτο από τα τρία να περιέχει τουλάχιστον 490 γρ. καφέ;
- β) το καθένα από τα τρία να έχει βάρος μεταξύ 490 και 505 γρ.;

Εκφράστε την απάντησή σας βάσει των τιμών $\Phi(2) = 0.9772$ και $\Phi(1) = 0.8413$ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

Άσκηση 7. Η εσωτερική διάμετρος (σε ίντσες) των σωλήνων από χαλκό που παράγει ένα εργοστάσιο ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(10, \sigma^2)$. Σωλήνες με εσωτερική διάμετρο εκτός των ορίων 10 ± 0.1 ίντσες ανακυκλώνονται.

- α) Αν $\sigma = 0.1$, να βρεθεί η πιθανότητα να ανακυκλωθούν ακριβώς τρεις σωλήνες σε ένα δείγμα πέντε σωλήνων που επιλέγεται τυχαία από την παραγωγή του εργοστασίου.
- β) Πόση θα πρέπει να γίνει η παράμετρος σ^2 έτσι ώστε η πιθανότητα ανακύκλωσης ενός σωλήνα να είναι 0.06;