

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(α)

$$\begin{aligned} P\{\mathbf{X} \leq 100\} &= 1 - P\{\mathbf{X} > 100\} \\ &= 1 - [P\{\mathbf{X} = 105\} + P\{\mathbf{X} = 104\} + P\{\mathbf{X} = 103\} + P\{\mathbf{X} = 102\} + P\{\mathbf{X} = 101\}] \\ &= 1 - [(0.9)^{105} + \binom{105}{104}(0.9)^{104}(0.1) + \binom{105}{103}(0.9)^{103}(0.1)^2 + \binom{105}{102}(0.9)^{102}(0.1)^3 + \binom{105}{101}(0.9)^{101}(0.1)^4] \\ &= 0.9832... \end{aligned}$$

(β) Εάν $\mathbf{X}$ είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους (n, p) , τότε $\mathbf{Y} = n - \mathbf{X}$ είναι επίσης μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $(n, 1 - p)$. Έτσι και ο αριθμός των μη-εμφανίσεων αποτελεί μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $(105, 0.1)$. Εφόσον έχουμε μεγάλη τιμή n και μικρή τιμή p , είναι λογική η προσεγγίση με *Poisson* τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda = n \cdot p = 10.5$

(γ)

$$\begin{aligned} P\{\mathbf{Y} \geq 5\} &= 1 - P\{\mathbf{Y} < 5\} = 1 - [P\{\mathbf{Y} = 0\} + P\{\mathbf{Y} = 1\} + P\{\mathbf{Y} = 2\} + P\{\mathbf{Y} = 3\} + P\{\mathbf{Y} = 4\}] \\ &= 1 - e^{-10.5} \left[1 + (10.5) + \frac{(10.5)^2}{2!} + \frac{(10.5)^3}{3!} + \frac{(10.5)^4}{4!} \right] = 0.978906... \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

(α) Καθώς πρέπει να ρίξουμε το νόμισμα τουλάχιστον 2 φορές για να έρθουν 2 Κ (και θεωρητικά μπορεί να χρειαστεί να το ρίξουμε άπειρες φορές χωρίς να έρχονται τα 2 Κ), συμπεραίνουμε ότι η τυχαία μεταβλητή N παίρνει τιμές $\{2, 3, 4, \dots\}$. Το γεγονός $\{N = n\}$ συμβαίνει μόνο αν σε $n - 1$ ρίψεις εμφανιστεί 1 φορά το Κ (και επομένως $n - 2$ φορές το Γ) και στην ρίψη n εμφανιστεί το Κ. Άρα:

$$\begin{aligned} p_N(n) &= P(N = n) = \binom{n-1}{1} \cdot p \cdot (1-p)^{n-2} \cdot p, \quad n = 2, 3, \dots \\ &= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια η N ακολουθεί Pascal κατανομή με $r = 2$.

(β) Για τη διωνυμική κατανομή έχουμε δείξει ότι:

$$E[X] = n \cdot p \text{ και } \text{var}(X) = np(1-p)$$

Συνεπώς, $6 = np$ και $2.4 = np(1-p)$ άρα $p = 0.6$ και $n = 10$. Οπότε:

(i) $P(X = 5) = \binom{10}{5} 0.6^5 \cdot 0.4^5 = 0.2007$.

(ii) $P(2X \geq 5) = P(X \geq 2.5) = \sum_{k=3}^{10} \binom{10}{k} 0.6^k \cdot 0.4^{10-k} = 0.9877$

(iii) $\text{var}(3X - 2) = 9\text{var}(X) = 9 \cdot 2.4 = 21.6$

Άσκηση 3.

Έστω X ο αριθμός των κεφαλών που προκύπτουν από τις 4 ρίψεις του νομίσματος. Η X θα είναι μία διωνυμική τυχαία μεταβλητή, η οποία θα έχει συνάρτηση πιθανότητας ίση με:

$$p_X(k) = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Σημειώστε ότι αυτή η συνάρτηση πιθανότητας αναπαριστά τη σ.π. για τον αριθμό των ευρώ που ο Θοδωρής κερδίζει αν ακολουθήσει την επιλογή (α).

Η μέση τιμή μίας διωνυμικής τυχαίας μεταβλητής ισούται με $n \cdot p$, όπου n είναι ο αριθμός των προσπαθειών και p είναι η πιθανότητα επιτυχίας. Επομένως, έχουμε ότι:

$$E[X] = 1.6$$

Τώρα ορίζουμε τη νέα τυχαία μεταβλητή Y , η οποία αναπαριστά τον αριθμό των ευρώ που ο Θοδωρής θα κερδίσει αν ακολουθήσει την επιλογή (β). Θα ισχύει ότι:

$$Y = X^2 - 1.5X$$

Τότε θα έχουμε:

$$E[Y] = E[X^2 - 1.5X] = E[X^2] - 1.5E[X] = n \cdot p(1-p) + (n \cdot p)^2 - 1.5(n \cdot p) = 1.12$$

Επειδή είναι $E[X] > E[Y]$, προφανώς η επιλογή (α) θα είναι πιο επικερδής για τον Θοδωρή.

Άσκηση 4.

(α) Έστω X το πλήθος των σωστών προβλέψεων της Παγώνας τη ζητούμενη εβδομάδα. Έχουμε διωνυμική κατανομή με $n = 7$ και $p = 0.99$. Πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) = \left(\binom{7}{6} * 0.99^6 * 0.01^1\right) + 0.99^7$. Ακόμη, έστω Y το πλήθος των σωστών προβλέψεων το μήνα Νοέμβριο (30 ημέρες). Τότε, $E[Y] = n * p = 30 * 0.99 = 29.7$.

(β) Η πιθανότητα να ολοκληρώσει επιτυχώς και αυτή τη δοκιμασία η Παγώνα είναι 0.99^{35} . Η πιθανότητα να αποκλειστεί την πρώτη μέρα της τρίτης εβδομάδας ισούται με την πιθανότητα να έχουμε πρώτη εμφάνιση αποτυχημένης πρόβλεψης (Γεωμετρική Κατανομή) την $15^{\text{η}}$ μέρα, δηλαδή $0.99^{14} * 0.01$.

(γ) Αν η Παγώνα ισοφαρίσει το ρεκόρ, αλλά δεν καταφέρει να το ξεπεράσει, σημαίνει ότι η πρώτη εμφάνιση αποτυχημένης πρόβλεψης γίνεται την $501^{\text{η}}$ μέρα. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $0.99^{500} * 0.01$. Επίσης, για να δημιουργήσει νέο ρεκόρ 1000 συνεχόμενων σωστών προβλέψεων, θα πρέπει να έχουμε πρώτη εμφάνιση αποτυχημένης πρόβλεψης την $1001^{\text{η}}$ μέρα με πιθανότητα $0.99^{1000} * 0.01$. Τέλος, ο μέσος αριθμός συνεχόμενων σωστών προβλέψεων μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από το γνωστό τύπο της Γεωμετρικής και είναι ίσος με $\frac{1}{p} = \frac{1}{0.01} = 100$, όπως και η αντίστοιχη διασπορά, η οποία είναι ίση με $\frac{1-p}{p^2} = \frac{0.99}{0.0001} = 9900$.

Άσκηση 5.

(α) Για την Poisson τ.μ. έχουμε ότι $E[X] = \lambda = \text{var}(X)$.

Συνεπώς, $\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \Rightarrow E[X^2] = \text{var}(X) + (E[X])^2 = \lambda + \lambda^2 = 5 + 5^2 = 30$

(β) Η Γεωμετρική τ.μ. έχει $E[Y] = 1/p$, $var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$.

Συνεπώς, $var(2 - 3Y) = 9var(Y) = 9\frac{1-p}{p^2}$.

Αλλά, $E[Y] = 4 = \frac{1}{p} \Rightarrow p = \frac{1}{4}$.

Τελικά, $var(2 - 3Y) = 9\frac{1-1/4}{(1/4)^2} = 108$.

(γ) Προφανώς, $Z \sim \Delta(n=10, p)$ και επομένως η (αδέσμευτη) μέση τιμή της Z είναι $E[Z] = 10p$. Τώρα, δεδομένης της εκφώνησης, έχουμε ότι $Z = 4 + Y$, όπου $Y \sim \Delta(n=4, p)$. Δηλαδή, σε αυτή την περίπτωση έχουμε σίγουρα 4 εμφανίσεις (στις 6 πρώτες δοκιμές) και Y εμφανίσεις στις τελευταίες 4 δοκιμές, όπου προφανώς $Y \sim \Delta(4, p)$. Επομένως, $E[Z|A \text{ 4 φορές στις 6 πρώτες δοκιμές}] = 4 + E[Y] = 4 + 4p$.

Άσκηση 6.

(α) Προσθέτουμε όλες τις τιμές του πίνακα και θέτουμε το άθροισμα ίσο με 1.

$$20c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{20}.$$

(β) $P(Y < X) = c + 6c + 4c = 11c = 11/20$.

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(γ) $P(Y > X) = 2c + c + c = 4c = 1/5$.

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(δ) $P(Y = X) = 1 - P(Y < X) - P(Y > X) = 1 - \frac{11}{20} - \frac{1}{5} = 1/4$

(ε) $P(Y = 3) = c + c + 2c = 4c = 1/5$.

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(στ)

$$p_X(x) = \begin{cases} 3/10, & x=1 \\ 1/10, & x=2 \\ 3/5, & x=3 \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & y=1 \\ 3/10, & y=2 \\ 1/5, & y=3 \end{cases}$$

(ζ)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{1}{10} \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 3 = 2.3 \\ \mathbf{E}[Y] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 1.7 \end{aligned}$$

(η)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2] &= \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{1}{10} \cdot 4 + \frac{3}{5} \cdot 9 = 6.1 \\ \mathbf{E}[Y^2] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot 9 = 3.5 \\ \text{var}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = 6.1 - 2.3^2 = 0.81 \\ \text{var}(Y) &= \mathbf{E}[Y^2] - (\mathbf{E}[Y])^2 = 3.5 - 1.7^2 = 0.61 \end{aligned}$$

Άσκηση 7.

(α') Δεδομένου ότι φέρνουμε $X = x$ στη ρίψη του 6-εδρου δίκαιου ζαριού, ρίχνουμε το κέρμα x φορές και το πλήθος Y των κεφαλών που εμφανίζονται ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = x$ και $p = \frac{1}{2}$:

$$Y/\{X = x\} \sim \Delta(x, \frac{1}{2})$$

Συνεπώς,

$$P_{Y/X}(y/x) = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{x-y} = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 1 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq x.$$

$$(\beta') \quad P(Y = 3 / X = 6) = P_{Y/X}(y = 3 / x = 6) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64} = 0.3125.$$

(γ') Προφανώς, η X είναι διακριτή ομοιόμορφη τ.μ. στο πεδίο τιμών $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(δ') Γνωρίζουμε ότι η δεσμευμένη Σ.Π. συχνά είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό της από κοινού Σ.Π. μέσω του Πολλαπλασιαστικού νόμου:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_Y(y) \cdot p_{X/Y}(x/y) \\ &= p_X(x) \cdot p_{Y/X}(y/x) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η από κοινού Σ.Π. των X και Y είναι:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_X(x) \cdot p_{Y/X}(y/x) \\ &= \frac{1}{6} \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 1 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq x. \end{aligned}$$

(ε') Η πιθανότητα του γεγονότος να εμφανιστούν μόνο κεφαλές είναι

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{i=1}^6 p_{X,Y}(i,i) \quad (x=i, y=i) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \binom{i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right] = 0.164. \end{aligned}$$

Άσκηση 8.

(α) Οι τ.μ. X και Y δεν είναι ανεξάρτητες. Π.χ. δεδομένου ότι $X=1$, η Y δεν μπορεί ποτέ να πάρει την τιμή 3, καθώς $p_{Y/X}(3/1) = p_{X,Y}(1,3)/p_X(1) = 0/p_X(1) = 0$. Από την άλλη, $p_Y(3) = p_{X,Y}(2,3) + p_{X,Y}(3,3) > 0$. Άρα, $p_Y(3) \neq p_{Y/X}(3/1)$.

(β) Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι η τ.μ. X είναι Διωνυμική ως άθροισμα τ.μ. Bernoulli, δηλαδή $X \sim \Delta(4, p)$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(X_1=1/X=2) &= \frac{P(X_1=1 \cap X=2)}{P(X=2)} \\ &= \frac{p \cdot \binom{3}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{3-1}}{\binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{4-2}} = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Συνεπώς, $P(X_1=0/X=2) = 1 - P(X_1=1/X=2) = \frac{1}{2}$.

Τελικά, $E[X_1/X=2] = 1 \cdot P(X_1=1/X=2) + 0 \cdot P(X_1=0/X=2) = 0.5$

(γ) Αφού οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, η διασπορά του αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των διασπορών:

$$\begin{aligned} var(Z) &= var(3 + 2X + 5Y) = var(2X) + var(5Y) \\ &= 4var(X) + 25var(Y) \\ &= 4 \cdot 10p(1-p) + 25 \cdot 5q(1-q) \\ &= 40p(1-p) + 125q(1-q) \end{aligned}$$