

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 1/11/2019

Ημερομηνία Παράδοσης: 14/11/2019

Άσκηση 1.

Έστω ότι 105 άτομα κάνουν κράτηση για μια πτήση 100 θέσεων από την Αθήνα στο Ηράκλειο. Ο αριθμός των επιβατών που εμφανίζονται τελικά για την πτήση μπορεί να μοντελοποιηθεί με μία διωνυμική τυχαία μεταβλητή X με παραμέτρους (105, 0.9).

(α) Βρείτε την πιθανότητα όλοι οι επιβάτες που θα εμφανιστούν να βρουν θέση.

(β) Εξηγήστε γιατί ο αριθμός των επιβατών που δεν εμφανίζονται μπορεί να μοντελοποιηθεί με μια *Poisson* τυχαία μεταβλητή Y και υπολογίστε την τιμή της παραμέτρου λ .

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα όλοι οι επιβάτες που θα εμφανιστούν να βρούν θέση αλλά αυτή την φορά με βάση το *Poisson* μοντέλο. Δηλαδή υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y \geq 5)$ και συγκρίνετε την τιμή αυτή με την απάντηση που υπολογίσατε στο υποερώτημα (α).

Άσκηση 2.

(α) Σε ένα πείραμα τύχης, ρίχνουμε διαδοχικά ένα 'πειραγμένο' κέρμα (όπου η πιθανότητα να έρθει Κ σε κάθε ρίψη είναι p) έως ότου φέρουμε Κ για δεύτερη φορά. Έστω N η τ.μ. που μετρά τον αριθμό των ρίψεων μέχρι τη δεύτερη εμφάνιση κεφαλής, Κ. Δηλαδή, αν οι ρίψεις φέρουν Γ-Γ-Κ-Γ-Γ-Γ-Κ, τότε $N = 7$. Δώστε την πλήρη περιγραφή για την τ.μ. N (πεδίο τιμών και συνάρτηση πιθανότητας).

(β) Η τ.μ. X ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με μέση τιμή $E[X] = 6$ και διασπορά $var(X) = 2.4$. Υπολογίστε τις εξής ποσότητες: (i) $P(X = 5)$, (ii) $P(2X \geq 5)$, (iii) $var(3X - 2)$.

Άσκηση 3.

Ο Τσαμπίκος και ο Θοδωρής παίζουν το εξής παιχνίδι με ένα κέρμα για το οποίο η πιθανότητα να έρθει κεφαλή είναι ίση με 0.4. Ο Τσαμπίκος ρίχνει το κέρμα 4 φορές. Πριν τις ρίψεις, ο Θοδωρής έχει δύο επιλογές: (α) να κερδίσει, σε ευρώ, τον αριθμό των κεφαλών που έρχονται στις 4 ρίψεις του κέρματος, ή (β) να κερδίσει, σε ευρώ, το τετράγωνο του αριθμού των κεφαλών μείον 1.5 φορές τον αριθμό των κεφαλών. Ποια επιλογή πρέπει να ακολουθήσει ο Θοδωρής, δηλαδή, ποια επιλογή έχει το μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος;

Άσκηση 4.

Το Greece's Next Top Meteorologist (γνωστό και ως GNTM) αποτελεί έναν υψηλού επιπέδου διαγωνισμό, όπου δεκάδες μετεωρολόγοι στην Ελλάδα διαγωνίζονται κάθε δέκα χρόνια για την ανάδειξη του πιο ικανού. Η Παγώνα, όντας νέα και φιλόδοξη, έχει σαν στόχο τη συμμετοχή της στο διαγωνισμό και την κατάκτηση του τίτλου του GNTM. Οι προβλεπτικές της ικανότητες είναι αρκετά υψηλές, μιας και αποτυγχάνει να κάνει σωστή πρόβλεψη με πιθανότητα $p = 0.01$ ανά ημέρα.

- (α') Κατά τη διαδικασία των προκριματικών, η Παγώνα θα πρέπει να κάνει τουλάχιστον 6 σωστές προβλέψεις μέσα σε διάστημα μίας εβδομάδας για να μην αποκλειστεί. Ποια η πιθανότητα να περάσει την προκριματική φάση; Υπολογίστε, επίσης, τη μέση τιμή των σωστών προβλέψεων της Παγώνας το μήνα Νοέμβριο.
- (β') Έχοντας περάσει τα προκριματικά, η Παγώνα καταφέρνει να φτάσει με σχετική ευκολία και στο Top-10 των διαγωνιζόμενων. Σε μία από τις δοκιμασίες που τους ανατίθενται σε αυτήν τη φάση, θα πρέπει να επιτύχουν σε όλες τις προβλέψεις τους σε διάστημα πέντε εβδομάδων χωρίς να κάνουν κανένα λάθος. Ποια η πιθανότητα να ολοκληρώσει επιτυχώς αυτή τη δοκιμασία η Παγώνα; Ποια η πιθανότητα να αποκλειστεί την πρώτη μέρα της τρίτης εβδομάδας;
- (γ') Έχοντας αποκλείσει μεγάλα ονόματα του μετεωρολογικού χώρου στην Ελλάδα, η Παγώνα καταφέρνει να φτάσει στο μεγάλο τελικό, όπου καλείται να αντιμετωπίσει το θρύλο της μετεωρολογίας, Νάσο Αρνιακόπουλο. Για να καταφέρει η Παγώνα να τον εκθρονίσει και να κερδίσει η ίδια τον τίτλο του Greece's Next Top Meteorologist θα πρέπει να καταρρίψει το ρεκόρ του συνεχόμενων σωστών προβλέψεων το οποίο φτάνει τις 500 συνεχόμενες σωστές προβλέψεις. Ποια η πιθανότητα η Παγώνα να ισοφαρίσει το συγκεκριμένο ρεκόρ χωρίς, όμως, να καταφέρει να το ξεπεράσει; Ποια η πιθανότητα να δημιουργήσει νέο ρεκόρ 1000 σωστών προβλέψεων; Υπολογίστε το μέσο αριθμό συνεχόμενων σωστών προβλέψεων της Παγώνας και την αντίστοιχη διασπορά.

Για τις ανάγκες της Άσκησης 4, μπορείτε να θεωρήσετε ότι κάθε ημερήσια πρόβλεψη της Παγώνας είναι παντελώς ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες.

Άσκηση 5.

(α) Υπολογίστε το $E[X^2]$ για μία Poisson τ.μ. με μέση τιμή ίση με 5.

(β) Αν Y είναι Γεωμετρική τ.μ. με μέση τιμή 4, υπολογίστε το $var(2 - 3Y)$.

(γ) Η τ.μ. Z δηλώνει τον αριθμό των εμφανίσεων ενός γεγονότος A (με πιθανότητα εμφάνισης p) σε 10 ανεξάρτητες δοκιμές. Ποια είναι η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. Z δεδομένου ότι το γεγονός A εμφανίστηκε 4 φορές στις πρώτες 6 δοκιμές;

Άσκηση 6.

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X, Y δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

- (α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c .
- (β) Βρείτε την $P(Y < X)$.
- (γ) Βρείτε την $P(Y > X)$.
- (δ) Βρείτε την $P(Y = X)$.
- (ε) Βρείτε την $P(Y = 3)$.
- (στ) Βρείτε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.
- (ζ) Βρείτε τις μέσες τιμές $E[X]$, $E[Y]$.
- (η) Βρείτε τις διασπορές $var(X)$, $var(Y)$.

Άσκηση 7.

Έχετε στα χέρια σας ένα δίκαιο 6-εδρο ζάρι και ένα δίκαιο κέρμα. Ρίχνετε πρώτα το ζάρι και έστω X ο αριθμός που έρχεται. Στη συνέχεια, ρίχνετε το κέρμα X φορές και έστω ότι εμφανίζονται Y κεφαλές.

- (α') Ποια είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $p_{Y/X}(y/x)$; Δώστε την πλήρη μαθηματική περιγραφή της.
- (β') Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y = 3 / X = 6)$.
- (γ') Ποια είναι η Συνάρτηση Πιθανότητας της τ.μ. X ;
- (δ') Υπολογίστε την από κοινού Σ.Π. $p_{X,Y}(x, y)$ των τ.μ. X και Y .
- (ε') Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος να εμφανιστούν μόνο κεφαλές, δηλαδή $P(X = Y)$.

Άσκηση 8.

Στα παρακάτω ερωτήματα επιλέξτε τη σωστή απάντηση και αιτιολογείστε την επιλογή σας:

(α) Έστω δύο διακριτές τ.μ. X και Y , όπου κάθε μία παίρνει τιμές $\{1, 2, 3\}$. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας είναι $p_{X,Y}(x, y) = 0$, αν $(x, y) \in \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$ και $p_{X,Y}(x, y) > 0$, αν $(x, y) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$. Τότε:

- (i) Οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες.
- (ii) Οι τ.μ. X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(β) Έστω 4 ανεξάρτητες τ.μ. Bernoulli X_i , $i = 1, \dots, 4$, με παραμέτρο $p = 0.1$. Ορίζουμε την τ.μ. $X = \sum_{i=1}^4 X_i$. Τότε:

- (i) $E[X_1 / X = 2] = 0.1$.
- (ii) $E[X_1 / X = 2] = 0.5$.
- (iii) $E[X_1 / X = 2] = 0.25$.

(γ) Οι ανεξάρτητες τ.μ. X και Y είναι Διωνυμικές με παραμέτρους $(n = 10, p)$ και $(n = 5, q)$, αντίστοιχα. Δηλαδή $X \sim \Delta(10, p)$ και $Y \sim \Delta(5, q)$. Η διασπορά της τ.μ. $Z = 3 + 2X + 5Y$ είναι:

- (i) $20p(1 - p) + 25q(1 - q)$.
- (ii) $9 + 40p(1 - p) + 125q(1 - q)$.
- (iii) $40p(1 - p) + 125q(1 - q)$.