

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 22/10/2019

Ημερομηνία Παράδοσης: 1/11/2019

Άσκηση 1.

- (Α) Πόσες πινακίδες αυτοκινήτων με 3 γράμματα του ελληνικού αλφάβητου και 4 ψηφία μπορούν να σχηματιστούν; Πόσες από αυτές έχουν τουλάχιστον 2 διαφορετικά γράμματα;
- (Β) Τραβάμε χαρτιά από μια τράπουλα 52 φύλλων, με επαναθέσεις. Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να τραβηχθούν 6 χαρτιά, έτσι ώστε στο 6ο χαρτί να εμφανίζεται η πρώτη επανάληψη;
- (Γ) Πόσες σημαίες με τρεις ρίγες μπορούν να σχηματιστούν εάν γνωρίζουμε ότι η μεσαία λωρίδα θα πρέπει να έχει διαφορετικό χρώμα από τις άλλες δύο και εάν τα πιθανά χρώματα είναι Κόκκινο, Μπλε, Κίτρινο, Πράσινο, Μαύρο και Άσπρο;
- (Δ) Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί abc , με $a, b, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ μπορούν να σχηματιστούν με την ιδιότητα $a \leq b \leq c$;
- (Ε) Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 5 δώρα σε 15 άτομα, αν κανένα άτομο δε μπορεί να πάρει πάνω από ένα δώρο;
- (ΣΤ) Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 7 από 15 συγκεκριμένους ανθρώπους σε έναν κύκλο;

Λύση:

- (Α) Για να το βρούμε αρκεί να απαριθμήσουμε πόσες λέξεις 3 γραμμάτων και πόσους 4ψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε. Μπορούμε να σκεφτούμε αρχικά ότι υπάρχουν 3 κενές θέσεις για γράμματα και 4 κενές θέσεις για ψηφία: _ _ _ _ _
Τα πιθανά γράμματα είναι 24, και τα πιθανά ψηφία είναι 10. Επομένως για την πρώτη θέση στα γράμματα έχουμε 24 πιθανά γράμματα, για την 2η θέση έχουμε 24 πιθανά γράμματα και για την τρίτη θέση έχουμε 24 πιθανά γράμματα. Ομοίως και για τα ψηφία. Δηλαδή:

$$24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^3 \text{ συνδυασμοί γραμμάτων}$$

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 \text{ συνδυασμοί ψηφίων}$$

Άρα όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί είναι:

$$24^3 \cdot 10^4$$

Εάν τώρα θέλουμε να έχουμε τουλάχιστον 2 διαφορετικά γράμματα, θα σκεφτούμε ως εξής:

Θα βρούμε όλες τις πιθανές πινακίδες με ακριβώς 2 διαφορετικά γράμματα και ακριβώς 3 διαφορετικά γράμματα, δηλαδή με τουλάχιστον 2 διαφορετικά.

- Ακριβώς 2 διαφορετικά: Παίρνω τις διατάξεις 24 γραμμάτων ανά 2 και το τρίτο γράμμα πρέπει υποχρεωτικά να είναι ένα από τα προηγούμενα 2 (οπότε 2 στο πλήθος ενδεχόμενα)

$$P(24, 2) \cdot 2 = \frac{24!}{22!} \cdot 2 = 24 \cdot 23 \cdot 2$$

- Ακριβώς 3 διαφορετικά: Διατάξεις 3 γραμμάτων από το σύνολο των 24 πιθανών

$$P(24, 3) = \frac{24!}{21!} = 24 \cdot 23 \cdot 22$$

Αθροίζοντας το πλήθος των παραπάνω ενδεχομένων, έχουμε

$$24 \cdot 23 \cdot 2 + 24 \cdot 23 \cdot 22 = 24^2 \cdot 23$$

στο πλήθος διαφορετικές διατάξεις των 3 γραμμάτων με τουλάχιστον 2 διαφορετικά γράμματα.

Για να υπολογίσουμε το αντίστοιχο πλήθος πινακίδων αρκεί να πολλαπλασιάσουμε και με τις πιθανές διατάξεις 4 ψηφίων. Δηλαδή έχουμε συνολικά

$$24^2 \cdot 23 \cdot 10^4$$

πιθανές πινακίδες.

- (B) Για να έχουμε την πρώτη επανάληψη στο 6ο τράβηγμα, σημαίνει ότι τα πρώτα 5 χαρτιά μπορεί να είναι οποιαδήποτε (αλλά διαφορετικά μεταξύ τους). Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{52}{5}$ διαφορετικούς τρόπους. Το 6ο φύλλο πρέπει να είναι ένα από αυτά που έχουν ήδη προηγηθεί, άρα υπάρχουν 5 τρόποι να γίνει αυτό (ή αλλιώς $\binom{5}{1}$). Επομένως, συνολικά οι πιθανοί τρόποι να γίνει αυτό είναι:

$$\binom{52}{5} \cdot \binom{5}{1} = \binom{52}{5} \cdot 5 = \frac{52!}{5! \cdot 47!} \cdot 5 = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{24}$$

- (Γ) Υπάρχουν 6 πιθανά χρώματα για την πρώτη λωρίδα, έπειτα 5 για την δεύτερη (αφού δεν πρέπει να είναι ίδιο χρώμα με την πρώτη), και τέλος 5 πιθανά χρώματα για την τελευταία λωρίδα (οποιοδήποτε χρώμα εκτός αυτού της μεσαίας λωρίδας). Άρα υπάρχουν $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ πιθανές σημαίες.
- (Δ) Αν όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά μεταξύ τους τότε η σειρά τους καθορίζεται από τη σχέση $a \leq b \leq c$. Άρα υπάρχουν $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ πιθανοί αριθμοί που πληρούν τη συνθήκη. Αν $a = b$ αλλά $a \neq c$, τότε έχουμε $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$ πιθανούς αριθμούς που πληρούν τη συνθήκη, και ίδιο πλήθος αριθμών για $b = c$ και $a \neq b$. Τέλος, υπάρχουν 9 πιθανοί τριψήφιοι αριθμοί abc τ.ω. $a = b = c$. Οπότε έχουμε συνολικά:

$$84 + 2 \cdot 36 + 9 = 165$$

πιθανούς διαφορετικούς αριθμούς που πληρούν την δοσμένη συνθήκη.

(Ε) Στην εκφώνηση δε διευκρινίζεται αν τα δώρα είναι διαφορετικά, οπότε έχουμε δύο πιθανές περιπτώσεις.

– Εάν υποθέσουμε ότι τα δώρα είναι διαφορετικά:

το πρώτο δώρο έχει 15 πιθανούς παραλήπτες, το 2ο 14, το 3ο 13 το 4ο 12 και το 5ο 11. Επομένως μπορούμε να μοιράσουμε 5 δώρα σε 15 άτομα με $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360360$ ή εναλλακτικά, θέλουμε να υπολογίσουμε τις μεταθέσεις 5 αντικειμένων σε 15 πιθανές θέσεις: $\frac{15!}{(15-5)!} = \frac{15!}{10!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360360$.

– Εάν υποθέσουμε ότι τα δώρα είναι ίδια μεταξύ τους αρκεί να υπολογίσουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να πάρουμε 5 ανθρώπους από ένα σύνολο 15 ανθρώπων (οι 5 εκείνοι θα είναι αυτοί που θα πάρουν ένα από τα 5 όμοια δώρα).

Άρα έχουμε $C(15, 5) = \frac{15!}{(15-5)!5!} = \frac{15!}{10!5!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{360360}{120} = 3003$.

(ΣΤ) Σκεφτόμαστε αρχικά πώς μπορούμε να βάλουμε 7 από 15 άτομα σε μια ευθεία, με

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = \frac{15!}{8!} \text{ ή } P(15, 7) \text{ τρόπους.}$$

Έπειτα, διαιρούμε με το πλήθος των ατόμων στη διάταξη για να μην συμπεριλάβουμε πάνω από μια φορά την κάθε μετάθεση (αφού έχουμε μια κυκλική διάταξη). Άρα το σύνολο των πιθανών μεταθέσεων είναι:

$$\frac{P(15, 7)}{7}$$

Άσκηση 2.

- I. Πόσοι δυνατοί αναγραμματισμοί (και χωρίς νόημα) μπορούν να γίνουν από τα γράμματα των λέξεων:
- (α) ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ
(β) ΣΟΚΟΛΑΤΑ
(γ) ΜΟΥΣΤΟΚΟΥΛΟΥΤΡΟ
- II. Παλινδρομικές λέξεις ονομάζονται εκείνες που μπορούν να διαβαστούν το ίδιο και προς τις δύο κατευθύνσεις. Πχ ANNA, ΣΟΦΟΣ. Πόσες παλινδρομικές λέξεις 7 γραμμάτων (και χωρίς νόημα) μπορούν να σχηματιστούν με το ελληνικό αλφάβητο (Α-Ω);

Λύση:

- I. Ο τύπος για τους ανασυνδυασμούς n αντικειμένων εκ των οποίων υπάρχουν k_1 αντικείμενα τύπου 1, k_2 αντικείμενα τύπου 2, ..., k_m αντικείμενα τύπου m είναι:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdots k_m!}$$

Με βάση αυτόν τον τύπο, η λύση του προβλήματος έχει ως εξής:

- (α) Με τη λέξη ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ($\boxed{1: \Pi} \boxed{1: \text{I}} \boxed{1: \Theta} \boxed{1: \text{A}} \boxed{1: \text{N}} \boxed{1: \text{O}} \boxed{2: \text{T}} \boxed{1: \text{H}} \boxed{1: \text{E}} \boxed{1: \Sigma}$) μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{11!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{11!}{2!} = \frac{39.916.800}{2} = 19.958.400$$

αναγραμματισμούς.

(Η απάντηση: $\frac{11!}{2}$, χωρίς περαιτέρω υπολογισμούς, είναι αρκετή.)

- (β) Με τη λέξη ΣΟΚΟΛΑΤΑ ($\boxed{1: \Sigma} \boxed{2: \text{O}} \boxed{1: \text{K}} \boxed{1: \Lambda} \boxed{2: \text{A}} \boxed{1: \text{T}}$) μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{8!}{2! \cdot 2!} = \frac{40.320}{4} = 10.080$$

αναγραμματισμούς.

(Η απάντηση: $\frac{8!}{4}$ ή $2 \cdot 7!$, χωρίς περαιτέρω υπολογισμούς, είναι αρκετή.)

- (γ) Με τη λέξη ΜΟΥΣΤΟΚΟΥΛΟΥΤΡΟ ($\boxed{1: \text{M}} \boxed{5: \text{O}} \boxed{3: \Upsilon} \boxed{1: \Sigma} \boxed{1: \text{T}} \boxed{1: \text{K}} \boxed{1: \Lambda} \boxed{1: \text{P}}$) μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{14!}{1! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{14!}{5! \cdot 3!} = \frac{87.178.291.200}{120 \cdot 6} = \frac{87.178.291.200}{720} = 121.080.960$$

αναγραμματισμούς.

(Η απάντηση: $\frac{14!}{5! \cdot 3!}$ ή $\frac{14!}{720}$, χωρίς περαιτέρω υπολογισμούς, είναι αρκετή.)

- II. Μια παλινδρομική λέξη 7 γραμμάτων, καθορίζεται από τα πρώτα 4 γράμματά της, αφού το 5ο, 6ο, 7ο γράμμα της καθορίζονται από τα πρώτα 3 (πχ ANEM $\Rightarrow$ ANE-M-ENA). Επομένως αρκεί να βρούμε πόσες λέξεις 4 γραμμάτων μπορούμε να φτιάξουμε με το ελληνικό αλφάβητο:

$$24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = (24)^4$$

Άσκηση 3. Λέμε ότι η τ.μ. I είναι μία δείκτρια μεταβλητή για το ενδεχόμενο A αν

$$I = \begin{cases} 1 & \text{αν συμβαίνει το } A \\ 0 & \text{αν δεν συμβαίνει το } A \end{cases}$$

Να βρεθεί η $E[I]$. Εκφράστε με λόγια το αποτέλεσμα.

Λύση:

Αφού $p(1) = P(A)$ και $p(0) = 1 - P(A)$, θα έχουμε ότι

$$E[I] = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot (1 - P(A)) = P(A).$$

Συνεπώς, η μέση τιμή της δείκτριας τυχαίας μεταβλητής ενός ενδεχομένου A ισούται με την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A .

Άσκηση 4. Είκοσι διαφορετικά αυτοκίνητα παρκάρουν στον ίδιο χώρο παρκαρίσματος κάθε μέρα. Δέκα από αυτά κατασκευάζονται στη Γερμανία, ενώ τα υπόλοιπα κατασκευάζονται σε άλλες χώρες. Ο χώρος παρκαρίσματος έχει ακριβώς 20 θέσεις, όλες σε μία σειρά, έτσι ώστε τα αυτοκίνητα να παρκάρουν το ένα δίπλα στο άλλο. Ωστόσο οι οδηγοί έχουν διαφορετικά ωράρια, και επομένως η θέση παρκαρίσματος για το κάθε αυτοκίνητο είναι τυχαία.

- (α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τα αυτοκίνητα να παρκάρουν;
 (β) Ποια είναι η πιθανότητα τα αυτοκίνητα να εναλλάσσονται (δύο αυτοκίνητα κατασκευασμένα στη Γερμανία δεν παρκάρονται το ένα δίπλα στο άλλο και δύο αυτοκίνητα κατασκευασμένα σε άλλες χώρες δεν παρκάρονται το ένα δίπλα στο άλλο);

Λύση: (α) Υπάρχουν $20!$ διαφορετικοί τρόποι να παρκάρουν τα 20 αυτοκίνητα στις 20 θέσεις, όσες όλες οι δυνατές μεταθέσεις 20 αντικειμένων. (β) Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα τα γερμανικά αυτοκίνητα να εναλλάσσονται με μη-γερμανικά πρέπει να απαριθμήσουμε τα ευνοϊκά ενδεχόμενα και να διαιρέσουμε με το νούμερο που βρήκαμε στο (α). Πρώτα διατάσσουμε τα 10 γερμανικά αυτοκίνητα. Υπάρχουν $10!$ τρόποι να γίνει αυτό. Με παρόμοιο τρόπο διατάσσουμε και τα 10 μη-γερμανικά αυτοκίνητα. Επίσης υπάρχουν $10!$ τρόποι να γίνει αυτό. Στη συνέχεια, για κάθε διάταξη μιας κατηγορίας παρεμβάλλουμε αυτοκίνητα από τη διάταξη της άλλης κατηγορίας. Αυτό μπορεί να γίνει με 2 διαφορετικούς τρόπους καθώς το πρώτο αυτοκίνητο μπορεί να είναι είτε γερμανικό είτε όχι. Συνεπώς έχουμε συνολικά $2 \cdot 10! \cdot 10!$ ευνοϊκές διατάξεις και η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{2 \cdot 10! \cdot 10!}{20!}$$

Εναλλακτικά: Από τις 20 διαθέσιμες θέσεις πρέπει να επιλέξουμε 10 στις οποίες θα τοποθετήσουμε τα 10 γερμανικά αυτοκίνητα. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{20}{10}$ τρόπους (σχεφτείτε την αναλογία με την ρίψη ενός κέρματος 20 φορές, όπου τοποθετούμε γερμανικό αυτοκίνητο στη θέση παρκαρίσματος οπότε έρχεται Κ). Σε μόνο δύο από αυτές εναλλάσσονται τα αυτοκίνητα ανάλογα με το αν είναι ή όχι γερμανικά. Επομένως η πιθανότητα είναι και πάλι

$$\frac{2}{\binom{20}{10}}$$

Άσκηση 5. Αν n άνθρωποι είναι παρόντες σε ένα δωμάτιο, ποια είναι η πιθανότητα δύο από αυτούς να μην έχουν γενέθλια την ίδια μέρα; Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το n ώστε η πιθανότητα αυτή να είναι μικρότερη του $1/2$;

Λύση:

Καθώς κάθε άτομο μπορεί να έχει γενέθλια οποιαδήποτε από τις 365 μέρες, υπάρχει ένα σύνολο από $(365)^n$ πιθανά αποτελέσματα. (Αγνοούμε την πιθανότητα κάποιος να έχει γεννηθεί στις 29 Φεβρουαρίου.) Υποθέτοντας πως κάθε ένα από τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανο να πραγματοποιηθεί, βλέπουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι $(365)(364)(363) \dots (365 - n + 1)/(365)^n$. Είναι πέρα από κάθε προσδοκία το γεγονός ότι για $n \geq 23$, αυτή η πιθανότητα είναι μικρότερη από $\frac{1}{2}$. Αυτό σημαίνει πως αν υπάρχουν 23 ή περισσότερα άτομα σε έναν χώρο, η πιθανότητα τουλάχιστον δύο από αυτούς να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα υπερβαίνει το $\frac{1}{2}$.

Άσκηση 6. Για την ταυτότητα $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$:

(α) Δώστε μια αλγεβρική απόδειξη (αναλύοντας τις ήδη γνωστές σχέσεις-τύπους). Από τον ορισμό του $\binom{n}{k}$ έχουμε:

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))! (k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!}$$

Επίσης

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! k!}$$

Θα χρειαστούμε επίσης τις ιδιότητες: $k(k-1)! = k!$ και $(n-k)(n-k-1)! = (n-k)!$

Επομένως, ξεκινώντας από το δεξί μέλος της ταυτότητας (γίνεται κι αντίστροφα):

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! k!} \\ &= \frac{(n-1)!k}{(n-k)!k!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

- (β) Ερμηνεύστε την με ένα επιχείρημα συνδυαστικής (σκεφτείτε ένα πρόβλημα στο οποίο θα ταιριάζει και εξηγήστε το).

Ο πιο εύκολος τρόπος είναι να σκεφτούμε μια σειρά με n bits (παίρνουν τιμές 0 ή 1). Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός από σειρές bits μήκους n τα οποία περιέχουν k άσσους είναι $\binom{n}{k}$. Από αυτές τις σειρές, κάποιες ξεκινούν με άσσο, άλλες με μηδενικό. Θα υπολογίσουμε πόσες από αυτές ξεκινούν με άσσο, και πόσες με μηδενικό και θα προσθέσουμε το πλήθος τους.

- * Αρχικά ας σκεφτούμε τις σειρές που ξεκινούν με άσσο. Μετά τον άσσο, ακολουθούν ακόμη $n - 1$ bits και ακριβώς $k - 1$ από αυτά πρέπει να είναι άσσοι. Πόσες πιθανές τέτοιες σειρές bits υπάρχουν; $\Rightarrow \binom{n-1}{k-1}$.

Τι παρατηρήσαμε ως τώρα λοιπόν; Ότι από όλες τις σειρές από bits μήκους n που περιέχουν k άσσους, οι $\binom{n-1}{k-1}$ από αυτές ξεκινούν με άσσο.

- * Ομοίως, υπάρχουν $\binom{n-1}{k}$ που ξεκινούν με 0 (μετά το πρώτο μηδενικό, χρειαζόμαστε ακόμη $n - 1$ bits που περιέχουν k άσσους).

Άρα, έχουμε:

$\{\text{Όλες οι πιθανές σειρές } n \text{ bits που περιέχουν } k \text{ άσσους}\} = \{\text{Όλες οι πιθανές σειρές } n \text{ bits που περιέχουν } k \text{ άσσους και ξεκινούν με 1}\} + \{\text{Όλες οι πιθανές σειρές } n \text{ bits που περιέχουν } k \text{ άσσους και ξεκινούν με 0}\}$. Δηλαδή:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Άλλος τρόπος: Πάμε σε ένα μαγαζί με σάντουιτς και θέλουμε να διαλέξουμε k υλικά ανάμεσα σε n επιλογές που δίνει το κατάστημα. Ένας τρόπος να υπολογίσουμε όλους τους συνδυασμούς είναι να πούμε απλώς ότι έχουμε $\binom{n}{k}$ συνδυασμούς. Άλλος τρόπος είναι να σκεφτούμε πχ αν θα βάλουμε ή όχι τυρί. Αν βάλουμε τυρί, τότε μένουν ακόμη να διαλέξουμε $k - 1$ υλικά από το σύνολο των $n - 1$ (όλα χωρίς το τυρί), δηλαδή $\binom{n-1}{k-1}$. Αν δεν θέλουμε τυρί, τότε μένουν ακόμη να διαλέξουμε k υλικά από το σύνολο των $n - 1$ (όλα χωρίς το τυρί), δηλαδή $\binom{n-1}{k}$. Επομένως όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί θα είναι το άθροισμα των δύο αυτών εκδοχών, δηλαδή $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Αφού όμως υπολογίσαμε ακριβώς το ίδιο πλήθος συνδυασμών με το αρχικό σκεπτικό, δείξαμε αυτό που θέλαμε: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Μπορεί να αιτιολογηθεί και με διαφορετικούς τρόπους, όπως πχ την καταμέτρηση υποσυνόλων ενός συνόλου κ.α. Εάν η επιχειρηματολογία είναι σωστή βήμα βήμα χωρίς λογικά άλματα, τότε και η απόδειξη θα είναι ορθή.

Άσκηση 7. Θεωρείστε την διακριτή τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.):

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a} & \text{αν } x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε τη σταθερά a και τη μέση τιμή $E[X]$.

(β) Υπολογίστε τη σ.π. της τ.μ. $Z = (X - E[X])^2$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα στο (β), υπολογίστε τη διασπορά της τ.μ. X .

Λύση:

(α) Το άθροισμα της συνάρτησης πιθανότητας όλων των πιθανών τιμών ισούται με 1. Επομένως,

$$1 = \sum_{x=-3}^3 p_X(x) = \frac{9}{a} + \frac{4}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{4}{a} + \frac{9}{a} = \frac{28}{a},$$

Άρα $a = 28$. Η μέση τιμή της τυχάιας μεταβλητής X είναι:

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \sum_{x=-3}^3 x \cdot \frac{x^2}{a} = -3 \cdot \frac{9}{a} - 2 \cdot \frac{4}{a} - 1 \cdot \frac{1}{a} + 1 \cdot \frac{1}{a} + 2 \cdot \frac{4}{a} + 3 \cdot \frac{9}{a} = 0.$$

Παρατηρείστε ότι η μέση τιμή μιας τυχάιας μεταβλητής ισούται πάντα με 0 εάν η συνάρτηση πιθανότητας είναι μια άρτια συνάρτηση, δηλαδή αν $p_X(x) = p_X(-x) \forall x$.

(β) Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές του Z για ένα δεδομένο X , και την πιθανότητα του γεγονότος αυτού.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p_X(x)$	9/28	1/7	1/28	0	1/28	1/7	9/28
$Z X=x$	9	4	1	0	1	4	9

Παρατηρούμε ότι το Z μπορεί να πάρει μόνο τρεις τιμές με πιθανότητα μη μηδενική (1,4,9). Επιπλέον, κάθε τέτοια τιμή αντιστοιχεί σε δύο τιμές του X . Άρα έχουμε για παράδειγμα, $p_Z(9) = P(Z=9) = P(Z=-3) + P(Z=3) = p_X(-3) + p_X(3)$. Άρα, η συνάρτηση πιθανότητας της Z είναι,

$$p_Z(z) = \begin{cases} 1/14 & z=1, \\ 2/7 & z=4, \\ 9/14 & z=9, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(γ) Ισχύει ότι: $\text{var}(X) = E[(X - E[X])^2] \Rightarrow \text{var}(X) = E[Z] = 1 \cdot \frac{1}{14} + 4 \cdot \frac{2}{7} + 9 \cdot \frac{9}{14} = 7$.

Άσκηση 8. Μία σχολική τάξη με 120 μαθητές θα πάει να επισκευτεί με 3 λεωφορεία ένα μουσείο. Οι μαθητές έχουν κατανεμηθεί 36 στο πρώτο, 40 στο δεύτερο και 44 στο τρίτο λεωφορείο. Μόλις τα λεωφορεία φτάσουν, επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή. Έστω X ο αριθμός των μαθητών που είναι στο λεωφορείο του τυχαία επιλεγμένου μαθητή. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας και η μέση τιμή της τ.μ. X .

Λύση. Αφού ο κάθε μαθητής, που επιλέγεται τυχαία από τους 120 μαθητές, έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, έχουμε ότι

$$P(X = 36) = \frac{36}{120}, \quad P(X = 40) = \frac{40}{120}, \quad P(X = 44) = \frac{44}{120}$$

Συνεπώς,

$$E[X] = 36 \left(\frac{3}{10} \right) + 40 \left(\frac{1}{3} \right) + 44 \left(\frac{11}{30} \right) = \frac{1208}{30} = 40.2667.$$