

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 22/10/2019

Ημερομηνία Παράδοσης: 1/11/2019

Άσκηση 1.

- (Α) Πόσες πινακίδες αυτοκινήτων με 3 γράμματα του ελληνικού αλφάβητου και 4 ψηφία μπορούν να σχηματιστούν; Πόσες από αυτές έχουν τουλάχιστον 2 διαφορετικά γράμματα;
- (Β) Τραβάμε χαρτιά από μια τράπουλα 52 φύλλων, με επαναθέσεις. Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να τραβηχθούν 6 χαρτιά, έτσι ώστε στο 6ο χαρτί να εμφανίζεται η πρώτη επανάληψη;
- (Γ) Πόσες σημαίες με τρεις ρίγες μπορούν να σχηματιστούν εάν γνωρίζουμε ότι η μεσαία λωρίδα θα πρέπει να έχει διαφορετικό χρώμα από τις άλλες δύο και εάν τα πιθανά χρώματα είναι Κόκκινο, Μπλε, Κίτρινο, Πράσινο, Μαύρο και Άσπρο;
- (Δ) Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί abc , με $a, b, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ μπορούν να σχηματιστούν με την ιδιότητα $a \leq b \leq c$;
- (Ε) Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 5 δώρα σε 15 άτομα, αν κανένα άτομο δε μπορεί να πάρει πάνω από ένα δώρο;
- (ΣΤ) Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 7 από 15 συγκεκριμένους ανθρώπους σε έναν κύκλο;

Άσκηση 2.

- I. Πόσοι δυνατοί αναγραμματισμοί (και χωρίς νόημα) μπορούν να γίνουν από τα γράμματα των λέξεων:

(α) ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

(β) ΣΟΚΟΛΑΤΑ

(γ) ΜΟΥΣΤΟΚΟΥΛΟΤΡΟ

- II. Παλινδρομικές λέξεις ονομάζονται εκείνες που μπορούν να διαβαστούν το ίδιο και προς τις δύο κατευθύνσεις. Πχ ANNA, ΣΟΦΟΣ. Πόσες παλινδρομικές λέξεις 7 γραμμάτων (και χωρίς νόημα) μπορούν να σχηματιστούν με το ελληνικό αλφάβητο (Α-Ω);

Άσκηση 3. Λέμε ότι η τ.μ. I είναι μία δείκτρια μεταβλητή για το ενδεχόμενο A αν

$$I = \begin{cases} 1 & \text{αν συμβαίνει το } A \\ 0 & \text{αν δεν συμβαίνει το } A \end{cases}$$

Να βρεθεί η $E[I]$. Εκφράστε με λόγια το αποτέλεσμα.

Άσκηση 4. Είκοσι διαφορετικά αυτοκίνητα παρκάρουν στον ίδιο χώρο παρκαρίσματος κάθε μέρα. Δέκα από αυτά κατασκευάζονται στη Γερμανία, ενώ τα υπόλοιπα κατασκευάζονται σε άλλες χώρες. Ο χώρος παρκαρίσματος έχει ακριβώς 20 θέσεις, όλες σε μία σειρά, έτσι ώστε τα αυτοκίνητα να παρκάρουν το ένα δίπλα στο άλλο. Ωστόσο οι οδηγοί έχουν διαφορετικά ωράρια, και επομένως η θέση παρκαρίσματος για το κάθε αυτοκίνητο είναι τυχαία.

- (α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τα αυτοκίνητα να παρκάρουν;
 (β) Ποια είναι η πιθανότητα τα αυτοκίνητα να εναλλάσσονται (δύο αυτοκίνητα κατασκευασμένα στη Γερμανία δεν παρκάρονται το ένα δίπλα στο άλλο και δύο αυτοκίνητα κατασκευασμένα σε άλλες χώρες δεν παρκάρονται το ένα δίπλα στο άλλο);

Άσκηση 5. Αν n άνθρωποι είναι παρόντες σε ένα δωμάτιο, ποια είναι η πιθανότητα δύο από αυτούς να μην έχουν γενέθλια την ίδια μέρα; Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το n ώστε η πιθανότητα αυτή να είναι μικρότερη του $1/2$;

Άσκηση 6. Για την ταυτότητα $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$:

- (α) Δώστε μια αλγεβρική απόδειξη (αναλύοντας τις ήδη γνωστές σχέσεις-τύπους).
 (β) Ερμηνεύστε την με ένα επιχείρημα συνδυαστικής (σκεφτείτε ένα πρόβλημα στο οποίο θα ταιριάζει και εξηγήστε το).

Άσκηση 7. Θεωρείστε την διακριτή τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.):

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a} & \text{αν } x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (α) Υπολογίστε τη σταθερά a και τη μέση τιμή $E[X]$.
 (β) Υπολογίστε τη σ.π. της τ.μ. $Z = (X - E[X])^2$.
 (γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα στο (β), υπολογίστε τη διασπορά της τ.μ. X .

Άσκηση 8. Μία σχολική τάξη με 120 μαθητές θα πάει να επισκευτεί με 3 λεωφορεία ένα μουσείο. Οι μαθητές έχουν κατανεμηθεί 36 στο πρώτο, 40 στο δεύτερο και 44 στο τρίτο λεωφορείο. Μόλις τα λεωφορεία φτάσουν, επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή. Έστω X ο αριθμός των μαθητών που είναι στο λεωφορείο του τυχαία επιλεγμένου μαθητή. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας και η μέση τιμή της τ.μ. X .