

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(i) Έστω τα ενδεχόμενα:

$$K = \{\text{Ένας ασθενής έχει καρδιακή ανεπάρκεια}\}$$
$$\Pi = \{\text{Ένας ασθενής έχει πνευμονική ανεπάρκεια}\}$$

Τότε, ξέρουμε ότι:

$$P(K) = \frac{60}{100} = 0.6, P(\Pi) = \frac{50}{100} = 0.5 \text{ και } P(K \cap \Pi) = \frac{35}{100} = 0.35$$

α) Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(K | \Pi)$. Άρα, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(K | \Pi) = \frac{P(K \cap \Pi)}{P(\Pi)} = \frac{0.35}{0.5} = 0.7$$

β) Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(K | \Pi^c)$. Άρα, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(K | \Pi^c) = \frac{P(K \cap \Pi^c)}{P(\Pi^c)}$$

Για 2 ενδεχόμενα K, Π ξέρουμε ότι ισχύει:

$$K \cap \Pi^c = K - \Pi$$

και

$$P(K - \Pi) = P(K) - P(K \cap \Pi)$$

Άρα, έχουμε:

$$P(K | \Pi^c) = \frac{P(K) - P(K \cap \Pi)}{1 - P(\Pi)} = \frac{0.6 - 0.35}{1 - 0.5} = 0.5$$

γ) Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(K | (K \cap \Pi)^c)$. Άρα, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(K | (K \cap \Pi)^c) = \frac{P(K \cap (K \cap \Pi)^c)}{P((K \cap \Pi)^c)} = \frac{P(K) - P(K \cap \Pi)}{1 - P(K \cap \Pi)} = \frac{0.6 - 0.35}{1 - 0.35} \approx 0.38$$

(ii) Έστω τα ενδεχόμενα:

$$A = \{\text{Μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον Α}\}$$
$$B = \{\text{Μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον Β}\}$$
$$\Gamma = \{\text{Μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον Γ}\}$$
$$E = \{\text{Μια συσκευή είναι ελαττωματική}\}$$

Τότε, ξέρουμε ότι:

$$P(A) = 0.5, P(B) = 0.3, P(\Gamma) = 0.2, P(E | A) = 0.02, P(E | B) = 0.03 \text{ και } P(E | \Gamma) = 0.05$$

Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A | E)$. Εφαρμόζοντας τον Κανόνα του Bayes, έχουμε:

$$P(A | E) = \frac{P(E | A) \cdot P(A)}{P(E | A) \cdot P(A) + P(E | B) \cdot P(B) + P(E | \Gamma) \cdot P(\Gamma)}$$
$$= \frac{0.02 \cdot 0.5}{0.02 \cdot 0.5 + 0.03 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.2} \approx 0.34$$

Άσκηση 2. Διαισθητικά, υπάρχει κάποιος λάθος στον συλλογισμό του κρατούμενου. Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι αυτός δε βασίζεται σε σωστά ορισμένο μοντέλο πιθανότητας. Πιο συγκεκριμένα, το γεγονός όπου οι άλλοι 2 κρατούμενοι πρόκειται ν' αποφυλακιστούν δεν προσμετράται ορθά στον υπολογισμό της εκ των υστέρων πιθανότητας αποφυλάκισης.

Αποτυπώνοντας τα παραπάνω με μαθηματικούς όρους, έχουμε: Έστω A , B και C οι 3 κρατούμενοι, και έστω ότι ο A είναι ο κρατούμενος που σκέφτεται να ρωτήσει το γνωστό του φρουρό. Υποθέτοντας ότι αρχικά όλοι οι κρατούμενοι έχουν τις ίδιες πιθανότητες να αποφυλακιστούν, καθώς και ότι αν πρόκειται να αποφυλακιστούν οι κρατούμενοι B και C τότε ο φρουρός διαλέγει με ίδια πιθανότητα το ποιον από τους 2 (δηλαδή, τον B ή τον C) θα αποκαλύψει στον A , ουσιαστικά υπάρχουν τα εξής 4 διαφορετικά σενάρια:

1. Οι κρατούμενοι A και B πρόκειται να αποφυλακιστούν, και ο φρουρός υποδεικνύει τον B (Πιθανότητα: $\frac{1}{3}$)
2. Οι κρατούμενοι A και C πρόκειται να αποφυλακιστούν, και ο φρουρός υποδεικνύει τον C (Πιθανότητα: $\frac{1}{3}$)
3. Οι κρατούμενοι B και C πρόκειται να αποφυλακιστούν, και ο φρουρός υποδεικνύει τον B (Πιθανότητα: $\frac{1}{6}$)
4. Οι κρατούμενοι B και C πρόκειται να αποφυλακιστούν, και ο φρουρός υποδεικνύει τον C (Πιθανότητα: $\frac{1}{6}$)

Έτσι, έχουμε:

$$\frac{P(\text{Απελευθερώνεται ο κρατούμενος } A \mid \text{Ο φρουρός υποδεικνύει τον κρατούμενο } B)}{P(\text{Ο κρατούμενος } A \text{ πρόκειται να αποφυλακιστεί, και ο φρουρός υποδεικνύει τον κρατούμενο } B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

Με το ίδιο σκεπτικό, έχουμε:

$$\frac{P(\text{Απελευθερώνεται ο κρατούμενος } A \mid \text{Ο φρουρός υποδεικνύει τον κρατούμενο } \Sigma)}{P(\text{Ο κρατούμενος } A \text{ πρόκειται να αποφυλακιστεί, και ο φρουρός υποδεικνύει τον κρατούμενο } \Sigma)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

Έτσι, ανεξάρτητα από την ταυτότητα του κρατουμένου που αποκαλύπτει ο φρουρός, η πιθανότητα αποφυλάκισης του κρατούμενου A παραμένει $\frac{2}{3}$, δηλαδή ίση με την εκ των προτέρων πιθανότητά του για αποφυλάκιση.

Άσκηση 3.

- (i) Το κουτί περιέχει 15 κόκκινες μπάλες και 5 άσπρες μπάλες (συνολικά 20 μπάλες).

(α) Έστω $P(A_1)$ η πιθανότητα η 1η μπάλα να είναι άσπρη. Τότε, θα ισχύει ότι:

$$P(A_1) = \frac{5}{20}$$

Δεδομένου ότι η 1η μπάλα είναι άσπρη, πλέον θα υπάρχουν 19 μπάλες στο κουτί, από τις οποίες μόνο οι 4 θα είναι άσπρες. Η πιθανότητα ότι και η 2η μπάλα που επιλέγεται είναι άσπρη είναι η ακόλουθη:

$$P(A_2 | A_1) = \frac{4}{19}$$

Χρησιμοποιώντας τον Πολλαπλασιαστικό Νόμο, η πιθανότητα ότι και οι 2 μπάλες που επιλέγονται τυχαία είναι άσπρες θα είναι ίση με:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$

(β) Έστω $P(K_1)$ η πιθανότητα η 1η μπάλα να είναι κόκκινη. Τότε, θα ισχύει ότι:

$$P(K_1) = \frac{15}{20}$$

Δεδομένου ότι η 1η μπάλα είναι κόκκινη, πλέον θα υπάρχουν 19 μπάλες στο κουτί, από τις οποίες οι 5 θα είναι άσπρες. Η πιθανότητα ότι η 2η μπάλα που επιλέγεται τυχαία είναι άσπρη είναι η ακόλουθη:

$$P(A_2 | K_1) = \frac{5}{19}$$

Χρησιμοποιώντας τον Πολλαπλασιαστικό Νόμο, η πιθανότητα ότι η 1η μπάλα είναι κόκκινη και η 2η άσπρη θα είναι ίση με:

$$P(K_1 \cap A_2) = P(A_2 | K_1) \cdot P(K_1) = \frac{5}{19} \cdot \frac{15}{20} = \frac{15}{76}$$

(ii) Θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα:

A : {Το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι αρνητικό}

Θ : {Το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι θετικό}

B : {Ένα τυχαίο άτομο του πληθυσμού πάσχει από την ασθένεια}

Τότε, ξέρουμε ότι:

- $P(B) = \frac{1}{1000} = 0.001$, $P(B^c) = \frac{999}{1000} = 0.999$
- $P(A | B) = 0.01$, $P(\Theta | B) = 0.99$
- $P(A | B^c) = 0.02$, $P(\Theta | B^c) = 0.98$

(α) Σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, η πιθανότητα το αποτέλεσμα της εξέτασης να προκύψει θετικό θα είναι:

$$P(\Theta) = P(\Theta | B) \cdot P(B) + P(\Theta | B^c) \cdot P(B^c) = 0.99 \cdot 0.001 + 0.98 \cdot 0.999 = 0.02097$$

(β) Σύμφωνα με τον Κανόνα του Bayes, αν το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι θετικό, η πιθανότητα να πάσχει πράγματι το άτομο από την ασθένεια θα είναι:

$$P(B | \Theta) = \frac{P(\Theta | B) \cdot P(B)}{P(\Theta | B) \cdot P(B) + P(\Theta | B^c) \cdot P(B^c)} = \frac{P(\Theta | B) \cdot P(B)}{P(\Theta)} = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.02097} \approx 0.047$$

Άσκηση 4.

(i) Ορίζουμε το γεγονός A : {Το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής $\frac{1}{3}$ ρίχνεται πρώτο}.

Τότε, προφανώς ισχύει ότι: A^c : {Το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής $\frac{2}{3}$ ρίχνεται πρώτο}.

Χρησιμοποιώντας αυτή τη διαμέριση του δειγματοχώρου, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, και έχουμε:

$$P(H_1) = P(H_1 | A) \cdot P(A) + P(H_1 | A^c) \cdot P(A^c) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ομοίως, έχουμε:

$$P(H_2) = P(H_2 | A) \cdot P(A) + P(H_2 | A^c) \cdot P(A^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(ii) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(H_1 \cap H_2) &= P(A) \cdot P(H_1 \cap H_2 | A) + P(A^c) \cdot P(H_1 \cap H_2 | A^c) = \\ &= P(A) \cdot P(H_1 | A) \cdot P(H_2 | A) + P(A^c) \cdot P(H_1 | A^c) \cdot P(H_2 | A^c) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

(iii) Από τα παραπάνω ερωτήματα είναι προφανές ότι:

$$P(H_1 \cap H_2) = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(H_1) \cdot P(H_2)$$

Συνεπώς, τα γεγονότα H_1, H_2 δεν είναι ανεξάρτητα (αν και είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα, δεδομένου του γεγονότος A).

Άσκηση 5. Θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα:

G : {Κάποιος τυχαίος άνθρωπος είναι καλός οδηγός}

M : {Κάποιος τυχαίος άνθρωπος είναι μέτριος οδηγός}

B : {Κάποιος τυχαίος άνθρωπος είναι κακός οδηγός}

A : {Κάποιος τυχαίος άνθρωπος παθαίνει ατύχημα}

(i) Με βάση το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, έχουμε:

$$P(A) = P(A | G) \cdot P(G) + P(A | M) \cdot P(M) + P(A | B) \cdot P(B) = 0.05 \cdot 0.2 + 0.15 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.3 = 0.175$$

(ii) Με βάση τον Κανόνα του Bayes, έχουμε:

(α)

$$P(G | A^c) = \frac{P(A^c | G) \cdot P(G)}{P(A^c)} = \frac{0.95 \cdot 0.2}{0.825} = 0.23$$

(β)

$$P(M | A^c) = \frac{P(A^c | M) \cdot P(M)}{P(A^c)} = \frac{0.85 \cdot 0.5}{0.825} = 0.51$$

Άσκηση 6.

(i) Αφού τα ενδεχόμενα A, B, Γ είναι ανεξάρτητα, ισχύουν οι εξής σχέσεις:

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), P(A \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma), P(B \cap \Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma)$
- $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma)$

(α) Για να είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα $A \cup B, \Gamma$, θα πρέπει να ισχύει:

$$P((A \cup B) \cap \Gamma) = P(A \cup B) \cdot P(\Gamma)$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap \Gamma) &= P((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)) = P(A \cap \Gamma) + P(B \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma) \\ &= P(A \cap \Gamma) + P(B \cap \Gamma) - P(A)P(B)P(\Gamma) \\ &= P(A)P(\Gamma) + P(B)P(\Gamma) - P(A)P(B)P(\Gamma) \\ &= P(\Gamma) [P(A) + P(B) - P(A)P(B)] \\ &= P(\Gamma)P(A \cup B) = P(A \cup B) \cdot P(\Gamma) \end{aligned}$$

Άρα, τα ενδεχόμενα $A \cup B, \Gamma$ είναι ανεξάρτητα.

(β) Για να είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα $A, B \cap \Gamma$, θα πρέπει να ισχύει:

$$P(A \cap (B \cap \Gamma)) = P(A) \cdot P(B \cap \Gamma)$$

Έχουμε ότι:

$$P(A \cap (B \cap \Gamma)) = P(A)P(B)P(\Gamma) = P(A)P(B \cap \Gamma)$$

Άρα, τα ενδεχόμενα $A, B \cap \Gamma$ είναι ανεξάρτητα.

(γ) Για να είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα $A \cup B, \Gamma^c$, θα πρέπει να ισχύει:

$$P((A \cup B) \cap \Gamma^c) = P(A \cup B) \cdot P(\Gamma^c)$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap \Gamma^c) &= P((A \cup B) - \Gamma) \\ &= P(A \cup B) - P((A \cup B) \cap \Gamma) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(\Gamma) - P(B) \cdot P(\Gamma) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \\ &= (P(A) - P(A) \cdot P(\Gamma)) + (P(B) - P(B) \cdot P(\Gamma)) + (P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma)) \\ &= P(A) \cdot (1 - P(\Gamma)) + P(B) \cdot (1 - P(\Gamma)) - P(A) \cdot P(B) \cdot (1 - P(\Gamma)) \\ &= (1 - P(\Gamma)) \cdot (P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)) \\ &= P(\Gamma^c) \cdot (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= P(\Gamma^c) \cdot P(A \cup B) = P(A \cup B) \cdot P(\Gamma^c) \end{aligned}$$

Άρα τα ενδεχόμενα $A \cup B, \Gamma^c$ είναι ανεξάρτητα.

(ii) Αφού τα B, Γ είναι ασυμβίβαστα, ισχύει ότι:

$$B \cap \Gamma = \emptyset$$

Άρα, ισχύει και ότι:

$$(A \cap B) \cap (A \cap \Gamma) = \emptyset$$

Για να είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα $A, B \cup \Gamma$, θα πρέπει να ισχύει:

$$P(A \cap (B \cup \Gamma)) = P(A) \cdot P(B \cup \Gamma)$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup \Gamma)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap \Gamma) \\ &= P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\Gamma) \\ &= P(A) \cdot (P(B) + P(\Gamma)) \\ &= P(A) \cdot P(B \cup \Gamma) \end{aligned}$$

Άρα, τα ενδεχόμενα $A, B \cup \Gamma$ είναι ανεξάρτητα.

(iii) Για να είναι ανεξάρτητα τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των A, B , θα πρέπει να ισχύει:

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$$

Εφόσον τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\&= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\&= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\&= P(A^c) - P(B) + P(A)P(B) \\&= P(A^c) - P(B)(1 - P(A)) \\&= P(A^c)(1 - P(B)) \\&= P(A^c) \cdot P(B^c)\end{aligned}$$

Άρα, τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των A,B (A^c και B^c) είναι ανεξάρτητα.