

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 11/10/2019

Ημερομηνία Παράδοσης: 22/10/2019

Θέματα: Δεσμευμένη Πιθανότητα, Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας-Κανόνας του Bayes, Ανεξαρτησία.

Άσκηση 1.

- (i) Από τους ασθενείς που νοσηλεύονται σε μια κλινική, το 60% έχει καρδιακή ανεπάρκεια, το 50% έχει πνευμονική ανεπάρκεια και το 35% έχει και τα δύο. Βρείτε τις πιθανότητες:
- α) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.
 - β) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν δεν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.
 - γ) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν είναι γνωστό ότι δεν έχει και τα δύο προβλήματα.
- (ii) Τρεις εργάτες, οι Α,Β,Γ εργάζονται σε μια βιοτεχνία. Από ένα συγκεκριμένο είδος συσκευών ο Α κατασκευάζει το 50%, ο Β το 30%, ο Γ το 20%. Από αυτές τις συσκευές που κατασκευάζει ο Α, το 2% βγαίνουν ελαττωματικές. Τα αντίστοιχα ποσοστά για τους Β και Γ είναι 3% και 5%. Αγοράζουμε μια συσκευή και είναι ελαττωματική. Βρείτε την πιθανότητα να την έχει κατασκευάσει ο Α.

Άσκηση 2. Σε ένα σωφρονιστικό κατάστημα ανακοινώνεται η απελευθέρωση 2 εκ 3 κρατούμενων, η ταυτότητα των οποίων, ωστόσο, κρατείται μυστική. Ένας από τους κρατούμενους σκέφτεται να ρωτήσει έναν γνωστό του φρουρό να του πει ποιος είναι ο φυλακισμένος, εκτός από τον εαυτό του, που θα απελευθερωθεί, αλλά διστάζει με βάση τον ακόλουθο συλλογισμό: στην παρούσα κατάσταση γνώσης του κρατούμενου, η πιθανότητα απελευθέρωσης είναι $\frac{2}{3}$, αλλά αφού μάθει την απάντηση η πιθανότητα απελευθέρωσης θα γίνει $\frac{1}{2}$, αφού θα υπάρχουν 2 φυλακισμένοι (συμπεριλαμβανομένου του εαυτού του) των οποίων η μοίρα είναι άγνωστη και 1 ακριβώς από τους 2 θα απελευθερωθεί. Να εντοπιστεί το λάθος στον συλλογισμό του κρατούμενου.

Άσκηση 3.

- (i) Ένα κουτί περιέχει 15 κόκκινες και 5 άσπρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία 2 μπάλες, χωρίς επανάθεση. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:
- (α') Και οι 2 επιλεγμένες μπάλες είναι άσπρες.
 - (β') Η 1η επιλεγμένη μπάλα είναι κόκκινη και η 2η επιλεγμένη μπάλα είναι άσπρη.
- (ii) Ένα στα 1000 άτομα ενός πληθυσμού πάσχει από μία ασθένεια. Η εξέταση που πραγματοποιείται για τη διάγνωση της ασθένειας δίνει λάθος διάγνωση στο 1% των περιπτώσεων, αν το άτομο που υποβάλλεται στην εξέταση πάσχει όντως από την ασθένεια, και στο 2%, αν το άτομο που υποβάλλεται στην εξέταση δεν πάσχει από την ασθένεια.
- (α') Να βρεθεί η πιθανότητα θετικού αποτελέσματος εξέτασης σε κάποιο άτομο του πληθυσμού.
 - (β') Αν για κάποιο άτομο του πληθυσμού η εξέταση ήταν θετική, να υπολογιστεί η πιθανότητα αυτό να πάσχει πράγματι από την ασθένεια.

Άσκηση 4. Μας δίνονται 2 ‘πειραγμένα’ νομίσματα, εκ των οποίων το ένα φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $\frac{2}{3}$, ενώ το άλλο με πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Τα 2 νομίσματα φαίνονται να είναι πανομοιότυπα: δεν μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε εξ’ όψεως. Ρίχνουμε τα δύο νομίσματα από μία φορά το καθένα, διαλέγοντας στην τύχη (δηλαδή, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$) ποιο θα ρίξουμε πρώτο. Ορίζουμε τα γεγονότα: $H_i = \{H \text{ ι-στή ρίψη φέρνει κεφαλή}\}$, $i = 1, 2$. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

- (i) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: $P(H_1)$, $P(H_2)$.
- (ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα και οι 2 ρίψεις να φέρουν κεφαλή (δηλαδή, η $P(H_1 \cap H_2)$).
- (iii) Να εξεταστεί αν τα γεγονότα H_1, H_2 είναι ανεξάρτητα ή όχι.

Άσκηση 5. Μία ασφαλιστική εταιρεία κατατάσσει τους ανθρώπους σε 3 κατηγορίες, ανάλογα με την επικινδυνότητά τους στην οδήγηση: κατηγορία μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου. Τα αρχεία της εταιρείας δείχνουν ότι οι πιθανότητες οι πελάτες μικρού, μέσου και μεγάλου ρίσκου να έχουν ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι 0.05, 0.15 και 0.30 αντίστοιχα.

- (i) Αν το 20% του πληθυσμού αποτελείται από άτομα μικρού ρίσκου, το 50% από άτομα μέτριου ρίσκου και το υπόλοιπο 30% από άτομα μεγάλου ρίσκου, να υπολογιστεί το ποσοστό του πληθυσμού που έχει ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους.
- (ii) Αν κάποιος ασφαλισμένος δεν είχε κανένα ατύχημα το έτος 2018, να υπολογιστούν οι πιθανότητες να είναι άτομο:
 - (α’) Μικρού ρίσκου.
 - (β’) Μέτριου ρίσκου.

Άσκηση 6.

- (i) Αν τα ενδεχόμενα A, B και Γ είναι ανεξάρτητα, να εξεταστεί αν είναι επίσης ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα:
 - (α’) $A \cup B, \Gamma$.
 - (β’) $A, B \cap \Gamma$.
 - (γ’) $A \cup B, \Gamma^c$.
- (ii) Τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα. Το ίδιο ισχύει για τα ενδεχόμενα A, Γ. Τα B, Γ είναι ασυμβίβαστα. Αποδείξτε ότι τα ενδεχόμενα $A, B \cup \Gamma$ είναι ανεξάρτητα.
- (iii) Να αποδειχτεί ότι αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, τότε είναι ανεξάρτητα και τα συμπληρωματικά τους ενδεχόμενα.