

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2019-2020
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω M το σύνολο των επαγγελματιών, W το σύνολο των παντρεμένων και G το σύνολο των αποφοίτων πανεπιστημίου. Για να δείξουμε ότι τα νούμερα που μας παρουσιάζουν δεν είναι ακριβή, αρκεί να δείξουμε ότι $P(M \cup W \cup G) > 1$. Έχουμε ότι

$$P(M) = \frac{312}{1000}, \quad P(W) = \frac{470}{1000}, \quad P(G) = \frac{525}{1000}, \quad P(M \cap G) = \frac{42}{1000},$$
$$P(W \cap G) = \frac{147}{1000}, \quad P(W \cap M) = \frac{86}{1000}, \quad P(M \cap W \cap G) = \frac{25}{1000}.$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$\begin{aligned} P(M \cup W \cup G) &= P((M \cup W) \cup G) \\ &= P(M \cup W) + P(G) - P((M \cup W) \cap G) \\ &= P(M) + P(W) - P(M \cap W) + P(G) - P((M \cap G) \cup (W \cap G)) \\ &= P(M) + P(W) - P(M \cap W) + P(G) - P(M \cap G) - P(W \cap G) + P(M \cap G \cap W) \\ &= \frac{312 + 470 + 525 + 25 - (147 + 42 + 86)}{1000} \\ &= \frac{1057}{1000} > 1 \end{aligned}$$

Επομένως, τα νούμερα είναι αναληθή.

Άσκηση 2. Έστω G το ενδεχόμενο ο μαθητής που επιλέχθηκε να είναι πολύ καλός και C το ενδεχόμενο να του αρέσει η σοκολάτα. Τότε $P(G) = 0.6$, $P(C) = 0.7$ και $P(G \cap C) = 0.4$. Ζητείται η πιθανότητα $P(G^c \cap C^c)$. Άρα, έχουμε

$$P(G^c \cap C^c) = 1 - P(G \cup C) = 1 - ((P(G) + P(C) - P(G \cap C))) = 1 - (0.6 + 0.7 - 0.4) = 0.1$$

Άσκηση 3.

α) Εξετάζουμε τα ενδεχόμενα A και G . Αθροίζοντας τους φοιτητές που παρακολουθούν τα μαθήματα της Φυσικής και της Χημείας έχουμε: $340 + 240 = 580 > 400$. Άρα, $A \cap G \neq \emptyset$. Επομένως υπάρχουν φοιτητές που παρακολουθούν και τα δύο μαθήματα. Οπότε τα ενδεχόμενα A και G δεν είναι ασυμβίβαστα.

β) Ισχύει ότι $G - A \subseteq G$, οπότε:

$$\begin{aligned} P(G - A) &\leq P(G) \Leftrightarrow P(G) = \frac{240}{400} = \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow P(G - A) &\leq \frac{3}{5} \end{aligned}$$

γ) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A - G$. Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(A \cup G) &= 1 \Leftrightarrow \\ P(A) + P(G) - P(A \cap G) &= 1 \Leftrightarrow \\ P(A \cap G) &= P(A) + P(G) - 1 \Leftrightarrow \\ P(A \cap G) &= \frac{340}{400} + \frac{240}{400} - 1 \Leftrightarrow \\ P(A \cap G) &= \frac{9}{20} \end{aligned}$$

Άρα:

$$P(A - G) = P(A) - P(A \cap G) = \frac{34}{40} - \frac{9}{20} = \frac{2}{5}$$

δ) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $(A - G) \cup (G - A)$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P[(A - G) \cup (G - A)] &= P(A - G) + P(G - A) \\ &= P(A) - P(A \cap G) + P(G) - P(A \cap G) \\ &= P(A) + P(G) - 2P(A \cap G) \\ &= \frac{340}{400} + \frac{240}{400} - 2 \cdot \frac{9}{20} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

Άσκηση 4. Έχουμε

$$E = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6),$$

$$(6, 1), (6, 3), (6, 5)\} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}, a + b = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\},$$

$$F = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}, a = 1 \text{ ή } b = 1\},$$

$$G = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}, a + b = 5\}.$$

Άρα

$$P(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(F) = \frac{11}{36} \text{ και } P(G) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Επομένως,

$$E^c = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2),$$

$$(6, 4), (6, 6)\} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}, a + b = 2k, k \in \mathbb{N}\},$$

$$E \cap F = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (4, 1), (6, 1)\},$$

$$E \cup F = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6),$$

$$(6, 1), (6, 3), (6, 5), (1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (5, 1)\},$$

$$F \cap G = \{(1, 4), (4, 1)\},$$

$$E \cap F^c = \{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 3), (6, 5)\},$$

$$E \cap F \cap G = \{(1, 4), (4, 1)\}.$$

Άρα

$$P(E^c) = \frac{1}{2}, \quad P(E \cap F) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(F \cap G) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, \quad P(E \cap F^c) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3},$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = \frac{1}{2} + \frac{11}{36} - \frac{1}{6} = \frac{23}{36}, \quad P(E \cap F \cap G) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Άσκηση 5.

$$\alpha) P(\{\text{o } A \text{ κερδίζει τον } B\}) = P(\{\text{o } A \text{ να φέρει } 4\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\beta) P(\{\text{o } B \text{ κερδίζει τον } C\}) = P(\{\text{o } C \text{ φέρνει } 2\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\gamma) P(\{\text{o } C \text{ κερδίζει τον } D\}) = P(\{\text{o } C \text{ φέρνει } 2\} \text{ και } \{\text{o } D \text{ φέρνει } 1\}) + P(\{\text{o } C \text{ φέρνει } 6\}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ καθώς τα παραπάνω ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.}$$

$$\delta) P(\{\text{o } D \text{ κερδίζει τον } A\}) = P(\{\text{o } D \text{ φέρνει } 5\}) + P(\{\text{o } D \text{ φέρνει } 1\} \text{ και } \{\text{o } A \text{ φέρνει } 0\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ καθώς τα παραπάνω ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.}$$

Άσκηση 6.

$$\alpha) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3}$$

$$\beta) P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\gamma) P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\delta) P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$