

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217 - Πιθανότητες
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Λύσεις Προόδου - 17 Νοεμβρίου 2018

Θέμα 1

(α)

Στο μάθημα δείξαμε ότι για την διαφορά δύο συνόλων

$$D - E \triangleq D \cap E^c$$

ισχύει

$$P(D \cap E^c) = P(D) - P(D \cap E)$$

Συνεπώς, για

$$D = A \cap C \text{ και } E = B$$

παίρνουμε:

$$P(A \cap B^c \cap C) = P((A \cap C) \cap B^c) = P(A \cap C) - P(A \cap C \cap B) = 0.3 - 0.1 = 0.2$$

(β)

$$P(C/A \cap B) = \frac{P((A \cap B \cap C))}{P(A \cap B)} = \frac{P((A \cap B \cap C))}{P(A) * P(B)} = \frac{0.1}{0.4 * 0.4} = 0.625$$

Θέμα 2

(α) Το συνολικό πλήθος των δυνατών πεντάδων είναι: $\binom{10}{5}$. Το πλήθος των πεντάδων με 3, 4 και 5 πολύ καλούς παίκτες είναι: $\binom{6}{3} \binom{4}{2}$, $\binom{6}{4} \binom{4}{1}$ και $\binom{6}{5} \binom{4}{0}$, αντίστοιχα. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

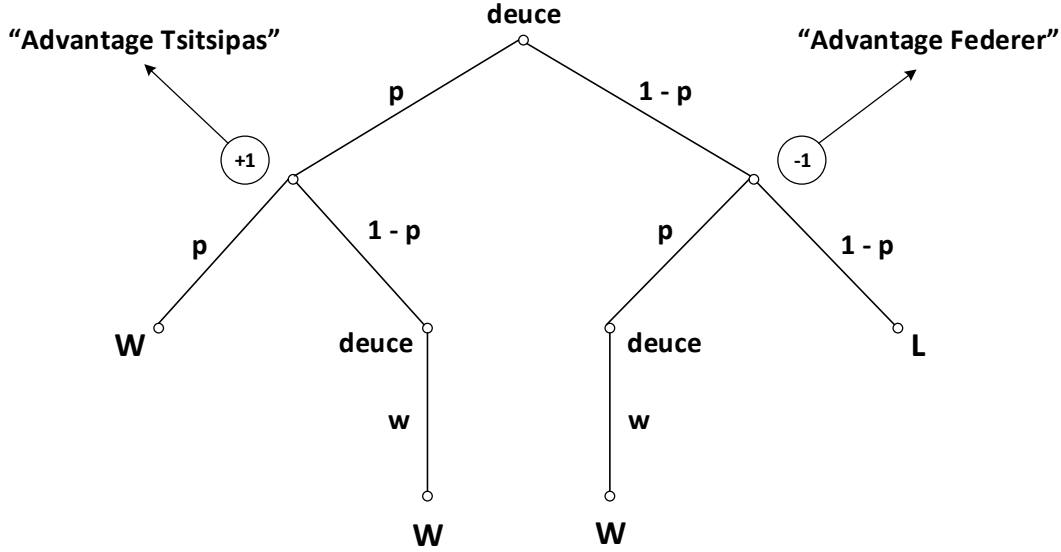
$$\frac{\binom{6}{3} \binom{4}{2} + \binom{6}{4} \binom{4}{1} + \binom{6}{5} \binom{4}{0}}{\binom{10}{5}} = 0.7381$$

(β) Το συνολικό πλήθος των δυνατών επιτροπών είναι: $\binom{8}{4}$. Από αυτές, όσες έχουν ακριβώς 2 άντρες και 2 γυναίκες είναι $\binom{4}{2} \binom{4}{2}$. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$\frac{[\binom{4}{2}]^2}{\binom{8}{4}} = 0.5143$$

Θέμα 3

Ας ονομάσουμε W το γεγονός ότι ο Τσιτσιπάς κερδίζει το game ξεκινώντας από την κατάσταση deuce. Ζητάμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $w = P(W)$. Το δενδρικό διάγραμμα στο Σχήμα 1 ξεκινά από την deuce στη ρίζα και αρκεί να περιγράψει τους 2 πρώτους πόντους. Οι κόμβοι $(+1)$ και (-1) αντιστοιχούν σε πρώτο πόντο κερδισμένο ή χαμένο από τον Τσιτσιπά, αντίστοιχα. Από τους δύο κόμβους deuce του δεύτερου επιπέδου, αρκεί να περιγράψουμε απλό κλάδο μετάβασης στην κατάσταση W που μας ενδιαφέρει (με πιθανότητα μετάβασης τη ζητούμενη w). Προσθέτοντας όλες τις πιθανότητες κατά μήκος των ευνοϊκών διαδρομών, έχουμε:



Σχήμα 1: Το δενδρικό διάγραμμα του Θέματος 3.

$$w = P(W) = p^2 + p(1-p) \cdot w + (1-p)p \cdot w$$

$$w = p^2 + 2p(1-p) \cdot w \implies w = \frac{p^2}{1 - 2p(1-p)}.$$

Θέμα 4

α) Έστω η τ.μ. T , που είναι το πλήθος των ρίψεων που φέρνουν εξάρι. Προφανώς, η T ακολουθεί διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $n = 100$ και $p = 1/6$. $T \sim \Delta(n = 100, p = 1/6)$.

$$P_T(k) = P(T = k) = \binom{100}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 100$$

$$E[T] = np = \frac{100}{6}, \quad \text{var}(T) = np(1-p) = 100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{500}{36}$$

Καθώς κερδίζουμε 3 ευρώ κάθε φορά που έρχεται εξάρι, $X = 3T$.

Συνεπώς, η τ.μ. X παίρνει τιμές $3k(0, 3, 6, 9, \dots, 297, 300)$ με πιθανότητες:

$$P(X = 3k) = \binom{100}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 100$$

Εναλλακτικά,

$$P_X(x) = P(X = x) = \binom{100}{x/3} \left(\frac{1}{6}\right)^{x/3} \left(\frac{5}{6}\right)^{100-(x/3)}, \quad x = 0, 3, 6, \dots, 300$$

β) $E[Q] = E[3T] = 3np = 3 \cdot 100 \cdot \frac{1}{6} = 150$ και $\text{var}(X) = \text{var}(3T) = 9\text{var}(T) = 9 \cdot 100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 125$

γ) Έστω T_1 το πλήθος των ρίψεων από τις 25 που φέρνουν εξάρι. Τότε $T_1 \sim \Delta(n = 25, p = \frac{1}{6})$. Επίσης, $X_1 = 3T_1$ και $Y = 4X_1 = 12T_1$. Συνεπώς:

$$E[Y] = 12E[T_1] = 12 \cdot 25 \cdot \frac{1}{6} = 50$$

$$\text{var}(Y) = 12^2 \text{var}(T_1) = 12^2 \cdot 25 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 500$$

Βλέπουμε ότι το μέσο κέρδος παραμένει το ίδιο (50 ευρώ), αλλά η διασπορά στην δεύτερη περίπτωση είναι 4 φορές μεγαλύτερη (500 *vs* 125). Αυτό διότι η X προκύπτει από τετραπλάσιες ανεξάρτητες δοκιμές του πειράματος τύχης (100 ρίψεις *vs* 25 ρίψεις).

Θέμα 5

(α') Δεδομένου ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι διακριτές και ακολουθούν την Ομοιόμορφη Κατανομή, οι Συναρτήσεις Πιθανότητας (Μάζας) (PMF), $P_X(k)$ - $P_Y(k)$, θα δίνονται από τον εξής τύπο:

$$P_X(k) = P_Y(k) = \begin{cases} \frac{1}{4} & k = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, για την Τ.Μ. X , έχουμε:

$$E[X] = \sum_{k=1}^4 k P_X(k) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

Κατ' αναλογία, για την Τ.Μ. Y , έχουμε:

$$E[Y] = \sum_{k=1}^4 k P_Y(k) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

Παρατήρηση: Οι $P_X(x)$ - $P_Y(k)$ είναι έγκυρες Συναρτήσεις Πιθανότητας (Μάζας), καθώς ικανοποιούν την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\sum_{k=1}^4 P_X(k) = \sum_{k=1}^4 P_Y(k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(β') Εφόσον οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, από την θεωρία θα ισχύει:

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y] = 2.5 \cdot 2.5 = 6.25$$

(γ') Στο μάθημα αποδείξαμε ότι ισχύει η σχέση:

$$P_{X|A}(x) = P(X = x | A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

Το γεγονός $A = \{XY = 4\}$ συμβαίνει όταν το (X, Y) παίρνει τις τιμές $(1, 4)$ ή $(4, 1)$ ή $(2, 2)$.

$$\begin{aligned} P(A) &= P_{XY}(1, 4) + P_{XY}(4, 1) + P_{XY}(2, 2) \\ &\stackrel{X, Y \text{ ανεξάρτητες}}{=} P_X(1) \cdot P_Y(4) + P_X(4) \cdot P_Y(1) + P_X(2) \cdot P_Y(2) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

Επίσης, έχουμε:

(i) Για $x = 1$:

$$P(X = 1 \mid A) = P(X = 1, Y = 4) = P_{XY}(1, 4) = \frac{1}{16}$$

(ii) Για $x = 2$:

$$P(X = 2 \mid A) = P(X = 2, Y = 2) = P_{XY}(2, 2) = \frac{1}{16}$$

(iii) Για $x = 3$:

$$P(X = 3 \mid A) = P(\emptyset) = 0$$

(iv) Για $x = 4$:

$$P(X = 4 \mid A) = P(X = 4, Y = 1) = P_{XY}(4, 1) = \frac{1}{16}$$

Άρα, η δεσμευμένη Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) της T.M. X δεδομένου του γεγονότος $A = \{XY = 4\}$ θα είναι τελικά:

$$P_{X|A}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 1, 2, 4 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$