

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
17 Νοεμβρίου 2018 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Βασικές Έννοιες

Έστω A , B , και C τρία γεγονότα ορισμένα στο δειγματοχώρο Ω ενός πειράματος τύχης. Τα γεγονότα A και B είναι *ανεξάρτητα* μεταξύ τους. Επιπλέον σας δίδεται ότι:

$$P(A) = P(B) = P(C) = 0.4, \quad P(A \cap C) = 0.3, \quad P(B \cap C) = 0.2, \quad P(A \cap B \cap C) = 0.1$$

Υπολογίστε τις πιθανότητες:

(α) $P(A \cap B^c \cap C)$

(β) $P(C|A \cap B)$

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Συνδυαστική

(α) Μία ομάδα μπάσκετ αποτελείται από 10 παίκτες εκ των οποίων οι 6 θεωρούνται *πολύ καλοί* και οι 4 *μέτριοι*. Ως γνωστόν, ανά πάσα στιγμή, μόνο 5 παίκτες βρίσκονται μέσα στο γήπεδο. Λέμε ότι η αρχική πεντάδα είναι "δυνατή" αν τουλάχιστον οι 3 από τους 5 παίκτες που την απαρτίζουν είναι *πολύ καλοί*. Υπολογίστε την πιθανότητα με την οποία η αρχική πεντάδα είναι "δυνατή".

(β) Μία επιτροπή 4 ατόμων επιλέγεται από μία ομάδα που περιέχει 4 άντρες και 4 γυναίκες. Με ποια πιθανότητα η επιτροπή δεν είναι gender biased, δηλαδή αποτελείται από τον ίδιο αριθμό αντρών και γυναικών;

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Δένδρα και πολλαπλασιαστικός νόμος

Σε ορισμένα αθλήματα όπως το τένις υπάρχει η λεγόμενη κατάσταση της ισοπαλίας (deuce). Αυτό σημαίνει ότι το σκορ στο γκειμ (game) είναι ισόπαλο και ότι για να κερδίσει ένας από τους δύο παίκτες θα πρέπει να πάρει 2 συνεχόμενους πόντους. Υποθέτουμε ότι ο Τσιτσιπάς κερδίζει έναν οποιοδήποτε πόντο με πιθανότητα p , ανεξάρτητα από πόντο σε πόντο. Αν το γκέιμ είναι σε κατάσταση deuce, με τι πιθανότητα το κερδίζει ο Τσιτσιπάς;

Θέμα 4 - 20 μονάδες. Δοκιμές Bernoulli

Ρίχνετε ένα δίκαιο εξαέδρο ζάρι 100 φορές (ανεξάρτητα) και κερδίζετε 3 ευρώ κάθε φορά που έρχεται εξαέρι. Έστω η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X , το συνολικό κέρδος σας στο τέλος των 100 ρίψεων.

(α) Υπολογίστε την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X .

(β) Ποιο είναι το μέσο κέρδος σας, $E[X]$; Ποια η διασπορά του κέρδους, $var(X)$;

Αντί να ρίξετε το ζάρι 100 φορές, το ρίχνετε 25 φορές αλλά πολλαπλασιάζετε το νέο κέρδος X_1 (αυτό που προκύπτει μετά τις 25 ρίψεις) επί 4. Έστω $Y = 4X_1$ το νέο συνολικό κέρδος.

(γ) Υπολογίστε την μέση τιμή και την διαπορά της τ.μ. Y . Πώς συγκρίνονται αυτές με τις αντίστοιχες τιμές για την τ.μ. X ; Ποιο από τα δύο παιχνίδια συμφέρει να παίζετε;

Θέμα 5 - 20 μονάδες. Από κοινού κατανομές

Οι διακριτές ομοιόμορφες τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και παίρνουν ως τιμές τους τέσσερις ακέραιους αριθμούς $\{1, 2, 3, 4\}$. Υπολογίστε τα ακόλουθα:

(α) $E[X]$

(β) $E[XY]$

(γ) $P(X = k \mid XY = 4)$ για $k = 1, 2, 3, 4$. Με άλλα λόγια υπολογίστε την δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X δεδομένου του γεγονότος $A : \{XY = 4\}$.