

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 7

Άσκηση 1

Η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί την Κανονική Κατανομή με μέση τιμή $\mu = 10$ και διασπορά $\sigma^2 = 16$: $X \sim N(10, 16)$. Να υπολογιστούν οι ακόλουθες πιθανότητες, εφράζοντας την απάντησή σας βάσει των τιμών της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Κανονικής Κατανομής ($\Phi(\cdot)$):

- (i) $P(X \geq 15)$.
- (ii) $P(X \leq 5)$.
- (iii) $P(X^2 \geq 400)$.
- (iv) $P(X = 2)$.

Λύση

- (i) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Κανονικής Κατανομής ($\Phi(\cdot)$), έχουμε:

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - P\left(\frac{X - 10}{4} \leq \frac{15 - 10}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{4}\right) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

- (ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Κανονικής Κατανομής ($\Phi(\cdot)$), έχουμε:

$$P(X \leq 5) = P\left(\frac{X - 10}{4} \leq \frac{5 - 10}{4}\right) = \Phi\left(\frac{-5}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{4}\right) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

- (iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Κανονικής Κατανομής ($\Phi(\cdot)$), έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X^2 \geq 400) &= P(X \geq 20 \cup X \leq -20) = P(X \geq 20) + P(X \leq -20) \\ &= 1 - P\left(\frac{X - 10}{4} \leq \frac{20 - 10}{4}\right) + P\left(\frac{X - 10}{4} \leq \frac{-20 - 10}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{10}{4}\right) + \Phi\left(\frac{-30}{4}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{10}{4}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{30}{4}\right) = 2 - \Phi\left(\frac{10}{4}\right) - \Phi\left(\frac{30}{4}\right) = 2 - 0.9938 - 1 = 0.0062 \end{aligned}$$

- (iv) Δεδομένου ότι η Τ.Μ. X είναι συνεχής, έχουμε:

$$P(X = 2) = 0$$

Άσκηση 2

(α') Η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί την Κανονική Κατανομή με μέση τιμή $\mu = 2$ και διασπορά $\sigma^2 = 25$: $X \sim N(2, 25)$. Να υπολογιστούν οι ακόλουθες πιθανότητες, εφράζοντας την απάντησή σας βάσει των τιμών της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Κανονικής Κατανομής ($\Phi(\cdot)$):

(i) $P(|X| > 3)$.

(ii) $P(X < 3 \mid X > 2)$.

(β') Ένα στατιστικό μοντέλο που έχει προταθεί για το επαγγελματικό πρωτάθλημα μπάσκετ των Η.Π.Α. προβλέπει ότι όταν συναντώνται δύο σχετικά ισοδύναμες ομάδες, ο αριθμός των πόντων που σκοράρει σε μία περίοδο η εντός έδρας ομάδα μείον τον αριθμό των πόντων που σκοράρει η φιλοξενούμενη ομάδα είναι μία Κανονική Τ.Μ. με μέση τιμή $\mu = 1.5$ και διασπορά $\sigma^2 = 6$. Επίσης, το μοντέλο υποθέτει ότι οι διαφορές σκοραρίσματος κατά τις 4 περιόδους είναι ανεξάρτητες Τ.Μ.

Να υπολογιστούν οι ακόλουθες πιθανότητες, εφράζοντας την απάντησή σας βάσει των τιμών της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Κανονικής Κατανομής ($\Phi(\cdot)$):

(i) $P(\text{Κερδίζει η εντός έδρας ομάδα})$.

(ii) $P(\text{Κερδίζει η εντός έδρας ομάδα, δεδομένου ότι στο ημίχρονο είναι πίσω στο σκορ κατά 5 πόντους})$.

(iii) $P(\text{Κερδίζει η εντός έδρας ομάδα, δεδομένου ότι στο τέλος της 1ης περιόδου προηγείται με 5 πόντους})$.

Λύση

(α') Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Κανονικής Κατανομής ($\Phi(\cdot)$), έχουμε:

(i)

$$\begin{aligned} P(|X| > 3) &= P(\{X - 4 > 3\} \cup \{X - 4 < -3\}) = P(\{X > 7\} \cup \{X < 1\}) = P(X > 7) + P(X < 1) \\ &= 1 - P\left(\frac{X - 2}{5} \leq \frac{7 - 2}{5}\right) + P\left(\frac{X - 2}{5} \leq \frac{1 - 2}{5}\right) = 1 - \Phi(1) + \Phi\left(\frac{-1}{5}\right) \\ &= 1 - \Phi(1) + 1 - \Phi\left(\frac{1}{5}\right) = 2 - \Phi(1) - \Phi\left(\frac{1}{5}\right) = 2 - 0.8413 - 0.5793 = 0.5794 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(X < 3 \mid X > 2) &= \frac{P(\{X < 3\} \cap \{X > 2\})}{P(X > 2)} = \frac{P(2 < X < 3)}{1 - P(X \leq 2)} = \frac{P\left(\frac{2-2}{5} < \frac{X-2}{5} < \frac{3-2}{5}\right)}{1 - P\left(\frac{X-2}{5} < \frac{2-2}{5}\right)} \\ &= \frac{\Phi\left(\frac{1}{5}\right) - \Phi(0)}{1 - \Phi(0)} = \frac{0.5793 - 0.5}{1 - 0.5} = \frac{0.0793}{0.5} = 0.1586 \end{aligned}$$

(β') Έστω X_i η διαφορά των πόντων κάθε περιόδου, μεταξύ της εντός έδρας ομάδας και της φιλοξενούμενης ομάδας ($i = 1, 2, 3, 4$). Τότε, σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε ότι:

- $X_i \sim N(1.5, 6)$, $i = 1, 2, 3, 4$

- Οι X_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους Κανονικές Τ.Μ.

- (i) Για να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 4 περιόδων X_i) θα πρέπει να είναι θετική. Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$P_1 = P(\text{Κερδίζει η εντός έδρας ομάδα}) = P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0\right)$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$\sum_{i=1}^4 X_i \sim N(4 \times 1.5, 4 \times 6) \equiv N(6, 24)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_1 , έχουμε:

$$\begin{aligned} P_1 &= P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^4 X_i - 6}{\sqrt{24}} > \frac{0 - 6}{\sqrt{24}}\right) = 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^4 X_i - 6}{\sqrt{24}} \leq \frac{0 - 6}{\sqrt{24}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{-6}{\sqrt{24}}\right) = 1 - 1 + \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{24}}\right) = \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{24}}\right) = 0.8897 \end{aligned}$$

- (ii) Για να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα δεδομένου ότι στο ημίχρονο είναι πίσω στο σκορ κατά 5 πόντους, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 4 περιόδων X_i) θα πρέπει να είναι θετική υπό την προϋπόθεση ότι στο τέλος του ημιχρόνου (δηλαδή, στο τέλος των 2 πρώτων περιόδων) ήταν ίση με -5 . Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P_2 &= P(\text{Κερδίζει η εντός έδρας ομάδα} \mid \text{στο ημίχρονο είναι πίσω στο σκορ κατά 5 πόντους}) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0 \mid X_1 + X_2 = -5\right) = P\left(X_3 + X_4 - 5 > 0\right) = P\left(X_3 + X_4 > 5\right) \end{aligned}$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$X_3 + X_4 \sim N(2 \times 1.5, 2 \times 6) \equiv N(3, 12)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_2 , έχουμε:

$$\begin{aligned} P_2 &= P\left(X_3 + X_4 > 5\right) = P\left(\frac{X_3 + X_4 - 3}{\sqrt{12}} > \frac{5 - 3}{\sqrt{12}}\right) = 1 - P\left(\frac{X_3 + X_4 - 3}{\sqrt{12}} \leq \frac{5 - 3}{\sqrt{12}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right) = 1 - 0.7181 = 0.2819 \end{aligned}$$

- (iii) Για να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα δεδομένου ότι στο τέλος της 1ης περιόδου προηγείται με 5 πόντους, αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική διαφορά των πόντων στο τέλος του αγώνα (δηλαδή, στο τέλος και των 4 περιόδων X_i) θα πρέπει να είναι θετική υπό την προϋπόθεση ότι στο τέλος της 1ης περιόδου ήταν ίση με 5. Άρα, επιθυμούμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P_3 &= P(\text{Κερδίζει η εντός έδρας ομάδα} \mid \text{στο τέλος της 1ης περιόδου προηγείται με 5 πόντους}) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0 \mid X_1 = 5\right) = P\left(X_2 + X_3 + X_4 + 5 > 0\right) = P\left(X_2 + X_3 + X_4 > -5\right) \end{aligned}$$

Με βάση τις ιδιότητες της Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$X_2 + X_3 + X_4 \sim N(3 \times 1.5, 3 \times 6) \equiv N(4.5, 18)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της P_3 , έχουμε:

$$\begin{aligned} P_3 &= P\left(X_2 + X_3 + X_4 > -5\right) = P\left(\frac{X_2 + X_3 + X_4 - 4.5}{\sqrt{18}} > \frac{-5 - 4.5}{\sqrt{18}}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{X_2 + X_3 + X_4 - 4.5}{\sqrt{18}} \leq \frac{-5 - 4.5}{\sqrt{18}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-9.5}{\sqrt{18}}\right) = 1 - 1 + \Phi\left(\frac{9.5}{\sqrt{18}}\right) = 0.9874 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί την Κανονική Κατανομή με μέση τιμή $\mu = 2$ και διασπορά $\sigma^2 = 100$: $X \sim N(2, 100)$.

- (i) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(|X| < 8)$, εφράζοντας την απάντησή σας βάσει των τιμών της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Κανονικής Κατανομής ($\Phi(\cdot)$).
- (ii) Να υπολογιστεί η $E[(X - 4)^2]$.
- (iii) Έστω η Τ.Μ. Y , η οποία ορίζεται ως εξής: $Y = (X - 2)^2$. Να υπολογιστεί η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας της Τ.Μ. Y , $f_Y(y)$.

Λύση

- (i) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της Τυπικής Κανονικής Κατανομής ($\Phi(\cdot)$), έχουμε:

$$\begin{aligned} P(|X| < 8) &= P(-8 < X < 8) = P\left(\frac{-8 - 2}{10} < \frac{X - 2}{10} < \frac{8 - 2}{10}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{6}{10}\right) - \Phi(-1) = \Phi\left(\frac{6}{10}\right) - 1 + \Phi(1) = 0.7257 - 1 + 0.8413 = 0.5670 \end{aligned}$$

- (ii) Κάνοντας χρήση της-γνωστής από την θεωρία-σχέσης:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

, καθώς επίσης και της ιδιότητας της γραμμικότητας της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[(X - 4)^2] &= E[X^2 - 8X + 16] = E[X^2] - 8E[X] + 16 = VAR[X] + (E[X])^2 - 8E[X] + 16 \\ &= 100 + 4 - 8 \cdot 2 + 16 = 104 - 16 + 16 = 104 \end{aligned}$$

- (iii) Εφόσον $Y = (X - 2)^2$, η Τ.Μ. Y παίρνει μη-αρνητικές τιμές. Ως εκ τούτου, θα είναι:

$$f_Y(y) = 0, y < 0$$

Για $y \geq 0$, υπολογίζουμε την Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF) της Τ.Μ. Y , και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left((X-2)^2 \leq y\right) = P\left(-\sqrt{y} \leq X-2 \leq \sqrt{y}\right) = P\left(2-\sqrt{y} \leq X \leq 2+\sqrt{y}\right) \\
 &= P\left(\frac{2-\sqrt{y}-2}{10} \leq \frac{X-2}{10} \leq \frac{2+\sqrt{y}-2}{10}\right) = \Phi\left(\frac{2+\sqrt{y}-2}{10}\right) - \Phi\left(\frac{2-\sqrt{y}-2}{10}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{y}}{10}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{10}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{10}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{10}\right) - 1
 \end{aligned}$$

Με γνωστή την Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = 2 \cdot \frac{d}{dy} \left(\Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{10}\right) \right)$$

Εφόσον η $\Phi(u)$ είναι η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής της Τυπικής Κανονικής Κατανομής, έχουμε:

$$\frac{d\Phi(u)}{du} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Άρα, για $y \geq 0$, έχουμε:

$$f_Y(y) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{\sqrt{y}}{10}\right)^2}{2}} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{\sqrt{y}}{10} \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{200}} \cdot \frac{1}{20\sqrt{y}} = \frac{e^{-\frac{y}{200}}}{10\sqrt{2\pi y}}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_Y(y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{y}{200}}}{10\sqrt{2\pi y}} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Άσκηση 4

Σε ένα μικροβιολογικό εργαστήριο καλλιεργούνται για μελέτη δύο μικροοργανισμοί, ο Α και ο Β. Ο χρόνος ζωής σε ημέρες των μικροοργανισμών δίνεται από τις Τ.Μ. X και Y αντίστοιχα. Η από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c(x-y)^2 & 0 \leq x < 10, 0 \leq y < 10 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

, όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$.

- (i) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c .
- (ii) Να βρεθούν οι περιθώριες Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.
- (iii) Να βρεθεί η από κοινού Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής $F_{XY}(x, y)$.
- (iv) Ποια είναι η πιθανότητα κανένας από τους δύο μικροοργανισμούς να μην ζήσει περισσότερο από δύο μέρες;
- (v) Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένας από τους δύο μικροοργανισμούς να ζήσει περισσότερο από πέντε μέρες;

Λύση

- (i) Για να αποτελεί η $f_{XY}(x, y)$ μία έγκυρη από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy dx &= 1 \Leftrightarrow \int_0^{10} \int_0^{10} [c(x-y)^2] dy dx = 1 \Leftrightarrow c \int_0^{10} \int_0^{10} (x^2 - 2xy + y^2) dy dx = 1 \\ &\Leftrightarrow c \int_0^{10} \left(x^2 \left[y \right]_0^{10} - 2x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{10} + \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{10} \right) dx = 1 \Leftrightarrow c \int_0^{10} \left(10x^2 - 100x + \frac{1000}{3} \right) dx = 1 \\ &\Leftrightarrow c \left(10 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{10} - 100 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{10} + \frac{1000}{3} \left[x \right]_0^{10} \right) = 1 \Leftrightarrow c \left(10 \frac{1000}{3} - 100 \frac{100}{2} + \frac{1000}{3} 10 \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow c \left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{2} + \frac{10000}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow c \left(\frac{20000}{3} - \frac{10000}{2} \right) = 1 \Leftrightarrow c \left(\frac{10000}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow c = 6 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_{XY}(x, y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 6 \cdot 10^{-4}(x-y)^2 & 0 \leq x < 10, 0 \leq y < 10 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (ii) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

Για $0 \leq x < 10$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^{10} \left(6 \cdot 10^{-4}(x-y)^2 \right) dy = 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} (x-y)^2 dy \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \left(x^2 - 2xy + y^2 \right) dy = 6 \cdot 10^{-4} \left(x^2 \left[y \right]_0^{10} - 2x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{10} + \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{10} \right) \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \left(10x^2 - 100x + \frac{1000}{3} \right) = 10^{-4} \left(60x^2 - 600x + \frac{6000}{3} \right) = 2 \cdot 10^{-3} (3x^2 - 30x + 100) \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-3}(3x^2 - 30x + 100) & 0 \leq x < 10 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Για $0 \leq y < 10$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_0^{10} \left(6 \cdot 10^{-4} (x - y)^2 \right) dx = 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} (x - y)^2 dx \\
&= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \left(x^2 - 2xy + y^2 \right) dx = 6 \cdot 10^{-4} \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{10} - 2y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{10} + y^2 \left[x \right]_0^{10} \right) \\
&= 6 \cdot 10^{-4} \left(\frac{1000}{3} - 100y + 10y^2 \right) = 10^{-4} \left(60y^2 - 600y + \frac{6000}{3} \right) = 2 \cdot 10^{-3} (3y^2 - 30y + 100)
\end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_Y(y)$, θα δίνεται από τον τύπο :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-3} (3y^2 - 30y + 100) & 0 \leq y < 10 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η $f_Y(y)$ θα μπορούσε να υπολογιστεί εναλλακτικά θέτωντας στον τύπο της $f_X(x)$ όπου x το y , παρατηρώντας ότι η $f_{XY}(x, y)$ είναι συμμετρική ως προς x, y .

- (iii) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, η από κοινού Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο :

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds$$

(a) Για $\{(x, y) : x < 0 \text{ ή } y < 0\} \Leftrightarrow$

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y 0 dt ds = 0$$

(b) Για $\{(x, y) : 0 \leq x < 10 \text{ και } 0 \leq y < 10\} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
F_{XY}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds = \int_0^x \int_0^y f(s, t) dt ds = \int_0^x \int_0^y 6 \cdot 10^{-4} (s - t)^2 dt ds \\
&= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^x \int_0^y \left(s^2 - 2st + t^2 \right) dt ds = 6 \cdot 10^{-4} \int_0^x \left(s^2 \left[t \right]_0^y - 2s \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^y + \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^y \right) ds \\
&= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^x \left(s^2 y - sy^2 + \frac{y^3}{3} \right) ds = 6 \cdot 10^{-4} \left(y \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^x - y^2 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^x + \frac{y^3}{3} \left[s \right]_0^x \right) \\
&= 6 \cdot 10^{-4} \left(\frac{x^3 y}{3} - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right) = 10^{-4} (2 \cdot x^3 y - 3 \cdot x^2 y^2 + 2 \cdot xy^3) = 10^{-4} xy (2x^2 - 3xy + 2y^2)
\end{aligned}$$

(c) Για $\{(x, y) : 0 \leq x < 10 \text{ και } y \geq 10\} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
F_{XY}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds = \int_0^x \int_0^{10} f(s, t) dt ds = \int_0^x \int_0^{10} 6 \cdot 10^{-4} (s - t)^2 dt ds \\
&= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^x \int_0^{10} \left(s^2 - 2st + t^2 \right) dt ds = 6 \cdot 10^{-4} \int_0^x \left(s^2 \left[t \right]_0^{10} - 2s \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{10} + \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{10} \right) ds \\
&= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^x \left(10s^2 - 100s + \frac{1000}{3} \right) ds = 6 \cdot 10^{-4} \left(10 \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^x - 100 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^x + \frac{1000}{3} \left[s \right]_0^x \right) \\
&= 6 \cdot 10^{-4} \left(\frac{10x^3}{3} - \frac{100x^2}{2} + \frac{1000x}{3} \right) = 10^{-4} (20 \cdot x^3 - 300 \cdot x^2 + 2000 \cdot x) = 2 \cdot 10^{-3} (x^2 - 15x + 100)
\end{aligned}$$

(d) Για $\{(x, y) : x \geq 10 \text{ και } 0 \leq y < 10\} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_{XY}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds = \int_0^{10} \int_0^y f(s, t) dt ds = \int_0^{10} \int_0^y 6 \cdot 10^{-4} (s - t)^2 dt ds \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \int_0^y \left(s^2 - 2st + t^2 \right) dt ds = 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \left(s^2 \left[t \right]_0^y - 2s \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^y + \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^y \right) ds \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \left(s^2 y - sy^2 + \frac{y^3}{3} \right) ds = 6 \cdot 10^{-4} \left(y \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^{10} - y^2 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^{10} + \frac{y^3}{3} \left[s \right]_0^{10} \right) \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \left(\frac{1000y}{3} - \frac{100y^2}{2} + \frac{10y^3}{3} \right) = 10^{-4} (20 \cdot y^3 - 300 \cdot y^2 + 2000 \cdot y) = 2 \cdot 10^{-3} (y^2 - 15y + 100) \end{aligned}$$

(e) Για $\{(x, y) : x \geq 10 \text{ και } y \geq 10\} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_{XY}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds = \int_0^{10} \int_0^{10} f(s, t) dt ds = \int_0^{10} \int_0^{10} 6 \cdot 10^{-4} (s - t)^2 dt ds \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \int_0^{10} \left(s^2 - 2st + t^2 \right) dt ds = 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \left(s^2 \left[t \right]_0^{10} - 2s \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{10} + \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{10} \right) ds \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \left(10s^2 - 100s + \frac{1000}{3} \right) ds = 6 \cdot 10^{-4} \left(10 \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^{10} - 100 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^{10} + \frac{1000}{3} \left[s \right]_0^{10} \right) \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{2} + \frac{10000}{3} \right) = 10^{-4} (20000 - 30000 + 20000) = 10^{-4} \cdot 10000 = 1 \end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ ή } y < 0 \\ 10^{-4}xy(2x^2 + 2y^2 - 3xy) & 0 \leq x < 10 \text{ και } 0 \leq y < 10 \\ 2 \cdot 10^{-3}(x^2 - 15x + 100) & 0 \leq x < 10 \text{ και } y \geq 10 \\ 2 \cdot 10^{-3}(y^2 - 15y + 100) & x \geq 10 \text{ και } 0 \leq y < 10 \\ 1 & x \geq 10 \text{ και } y \geq 10 \end{cases}$$

(iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της από κοινού Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής, έχουμε :

$$P(X \leq 2, Y \leq 2) = F(2, 2) = 10^{-4} \cdot 2 \cdot 2 (2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 \cdot 2) = 4 \cdot 10^{-4} (8 + 8 - 12) = 16 \cdot 10^{-4} = \frac{16}{10000} = \frac{1}{625}$$

(v) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της από κοινού Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής, έχουμε :

$$\begin{aligned} P(\{X > 5\} \cup \{Y > 5\}) &= 1 - P(X \leq 5, Y \leq 5) = 1 - F(5, 5) = 1 - 10^{-4} \cdot 5 \cdot 5 (2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 \cdot 5) \\ &= 1 - 25 \cdot 10^{-4} (50 + 50 - 75) = 1 - 625 \cdot 10^{-4} = \frac{9375}{10000} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Θεωρούμε τις Τ.Μ. X και Y με από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας που δίνεται από τον εξής τύπο :

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c(2x + y) & 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

, όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$.

- (i) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c .
- (ii) Να βρεθούν οι περιθώριες Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(3 < X < 4, Y > 2)$
- (iv) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 3)$
- (v) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X + Y > 4)$
- (vi) Είναι οι Τ.Μ. X και Y ανεξάρτητες;

Λύση

- (i) Για να αποτελεί η $f_{XY}(x, y)$ μία έγκυρη από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

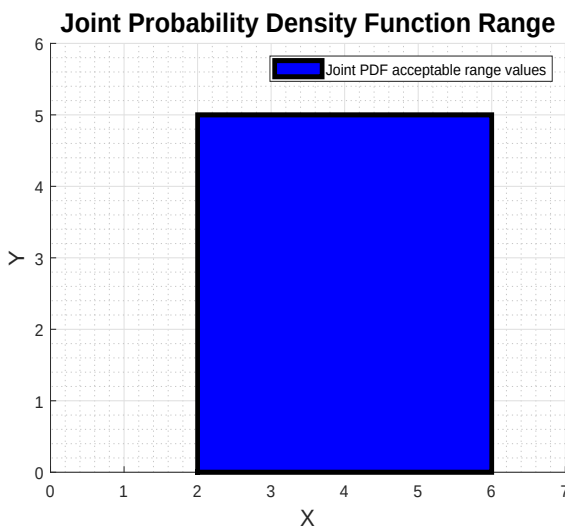
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^6 \int_0^5 [c(2x + y)] dy dx = 1 \Leftrightarrow c \int_2^6 \left(2x \left[y \right]_0^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^5 \right) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow c \int_2^6 \left(10x + \frac{25}{2} \right) dx = 1 \Leftrightarrow c \left(10 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^6 + \frac{25}{2} \left[x \right]_2^6 \right) = 1 \Leftrightarrow c [10 \cdot 16 + \frac{25}{2} \cdot 4] = 1 \Leftrightarrow 210c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{210}$$

Άρα, τελικά, η από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_{XY}(x, y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{210}(2x + y) & 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας τα επιτρεπτά πεδία τιμών των Τ.Μ. X, Y , λαμβάνουμε την γραφική παράσταση του συνόλου τιμών της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας (περιορισμένη στο διάστημα $[0, 7] \times [0, 6]$) που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σύνολο Τιμών της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{XY}(x, y)$.

- (ii) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

Για $2 < x < 6$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^5 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dy = \frac{1}{210} \left(2x \left[y \right]_0^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^5 \right) = \frac{1}{210} \left(10x + \frac{25}{2} \right)$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{210}(10x + \frac{25}{2}) & 2 < x < 6 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Για $0 < y < 5$ έχουμε ότι:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_2^6 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dx = \frac{1}{210} \left(2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^6 + y \left[x \right]_2^6 \right) = \frac{1}{210} (32 + 4y)$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_Y(y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

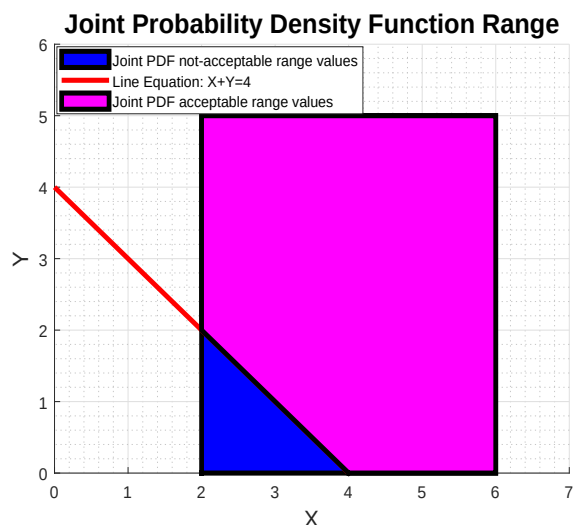
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{210}(4y + 32) & 0 < y < 5 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(3 < X < 4, Y > 2) &= \int_3^4 \int_2^5 f_{XY}(x, y) dy dx = \int_3^4 \int_2^5 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dy dx \\ &= \frac{1}{210} \left[\int_3^4 \left(2x \left[y \right]_2^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_2^5 \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left[\int_3^4 \left(6x + \frac{21}{2} \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left(6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_3^4 + \frac{21}{2} \left[x \right]_3^4 \right) \\ &= \frac{1}{210} \left(6 \cdot \frac{7}{2} + \frac{21}{2} \right) = \frac{1}{210} \cdot \frac{63}{2} = \frac{63}{420} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

- (iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= \int_3^6 \int_0^5 f_{XY}(x, y) dy dx = \int_3^6 \int_0^5 \left(\frac{1}{210}(2x + y) \right) dy dx \\ &= \frac{1}{210} \left[\int_3^6 \left(2x \left[y \right]_0^5 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^5 \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left[\int_3^6 \left(10x + \frac{25}{2} \right) dx \right] = \frac{1}{210} \left(10 \left[\frac{x^2}{2} \right]_3^6 + \frac{25}{2} \left[x \right]_3^6 \right) \\ &= \frac{1}{210} \left(10 \cdot \frac{27}{2} + 3 \cdot \frac{25}{2} \right) = \frac{1}{210} \cdot \frac{345}{2} = \frac{345}{420} = \frac{23}{28} \end{aligned}$$



Σχήμα 2: Γραφικός υπολογισμός της $P(X + Y > 4)$.

(v) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, με βάση το Σχήμα 2, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P(X + Y > 4) &= 1 - P(X + Y \leq 4) = 1 - \int_2^4 \int_0^{4-x} f_{XY}(x, y) dy dx = 1 - \int_2^4 \int_0^{4-x} \left(\frac{1}{210} (2x + y) \right) dy dx \\
 &= 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(2x \left[y \right]_0^{4-x} + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{4-x} \right) dx \right] = 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(2x(4-x) + \frac{(4-x)^2}{2} \right) dx \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(8x - 2x^2 + \frac{x^2 - 8x + 16}{2} \right) dx \right] = 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(8x - 2x^2 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 \right) dx \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{210} \left[\int_2^4 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 4x + 8 \right) dx \right] = 1 - \frac{1}{210} \left(-\frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^4 + 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 + 8 \left[x \right]_2^4 \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{210} \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{56}{3} + 4 \cdot \frac{12}{2} + 8 \cdot 2 \right) = 1 - \frac{1}{210} (-28 + 24 + 16) = 1 - \frac{1}{210} \cdot 12 = \frac{198}{210} = \frac{33}{35}
 \end{aligned}$$

(vi) Παρατηρούμε ότι εν προκειμένω ισχύει η σχέση:

$$f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$$

Ως εκ τούτου, οι Τ.Μ. X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Άσκηση 6

Θεωρούμε τις Τ.Μ. X και Y με από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} y^{-1} e^{-y - \frac{x}{y}}, & x, y > 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (i) Να υπολογιστεί η περιθώρια Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$.
- (ii) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{X|Y}(x | y)$.
- (iii) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής $F_{X|Y}(x | y)$.
- (iv) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 1 | Y = y)$.

- (v) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη Μέση Τιμή $E[X | Y = y]$, $y > 0$.

Λύση

- (i) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X , Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Για $y > 0$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_0^{+\infty} \left(y^{-1} e^{-y - \frac{x}{y}} \right) dx = \frac{e^{-y}}{y} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}} dx = \frac{e^{-y}}{y} \left[-y e^{-\frac{x}{y}} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{e^{-y}}{y} \left[-\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{e^{\frac{x}{y}}} \right) + y \right] = \frac{e^{-y}}{y} (0 + y) = e^{-y} \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_Y(y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (ii) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X , Y , καθώς και την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$, η δεσμευμένη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{X|Y}(x | y)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Για $x, y > 0$ έχουμε ότι:

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{y^{-1} e^{-y - \frac{x}{y}}}{e^{-y}} = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}$$

Άρα, τελικά, η δεσμευμένη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_{X|Y}(x | y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X|Y}(x | y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y} & x, y > 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (iii) Με γνωστή την δεσμευμένη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{X|Y}(x | y)$, η δεσμευμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής $F_{X|Y}(x | y)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_{X|Y}(x | y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(z | y) dz$$

Για $x, y > 0$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x | y) &= \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(z | y) dz = \int_0^x f_{X|Y}(z | y) dz = \int_0^x \frac{1}{y} e^{-\frac{z}{y}} dz \\ &= \frac{1}{y} \left[-y e^{-\frac{z}{y}} \right]_0^x = \frac{1}{y} (-y e^{-\frac{x}{y}} + y) = e^{-\frac{x}{y}} + 1 \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η δεσμευμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, $f_{X|Y}(x | y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_{X|Y}(x | y) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{y}} + 1 & x, y > 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής, έχουμε:

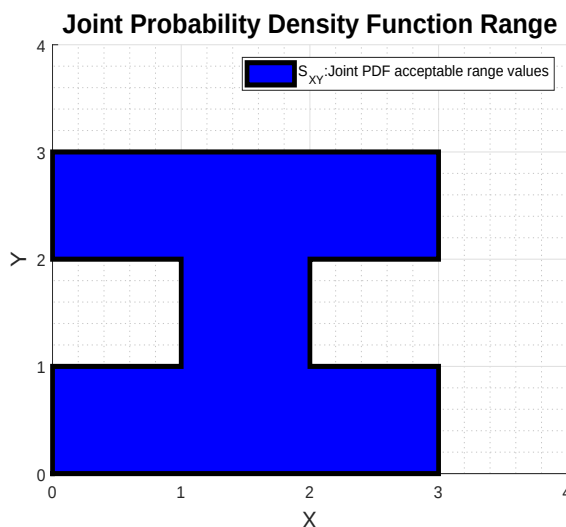
$$P(X > 1 | Y = y) = 1 - P(X \leq 1 | Y = y) = 1 - F_{X|Y}(1, y) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{y}}) = e^{-\frac{1}{y}}$$

(v) Για τον υπολογισμό της δεσμευμένης Μέσης Τιμής $E[X | Y = y]$, $y > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} E(X | Y = y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x | y) dx = \int_0^{+\infty} x \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} dx = \frac{1}{y} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{y}} dx \\ &= \frac{1}{y} \left(\left[-xy e^{-\frac{x}{y}} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} y e^{-\frac{x}{y}} dx \right) = \frac{1}{y} \left(0 + y \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}} dx \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}} dx = \left[-y e^{-\frac{x}{y}} \right]_0^{+\infty} = \left[-\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{e^{\frac{x}{y}}} \right) + y \right] = 0 + y = y \end{aligned}$$

Άσκηση 7

Οι συνεχείς Τ.Μ. X και Y έχουν σύνολο τιμών το γραμμοσκιασμένο χωρίο S_{XY} που φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Σύνολο Τιμών της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας $f_{XY}(x, y)$.

Οι X και Y ακολουθούν από κοινού Ομοιόμορφη Κατανομή που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in S_{XY} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

, όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$.

(i) Να υπολογιστεί η σταθερά c .

- (ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Y < X - 1)$.
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P[(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 > (0.5)^2]$.
- (iv) Να υπολογιστεί η περιθώρια Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

Λύση

- (i) Από το Σχήμα 3, έχουμε:

$$E_{S_{XY}} = E - 2 \cdot E_{\text{Τετραγώνου}} = 9 - 2 \cdot 1 = 7$$

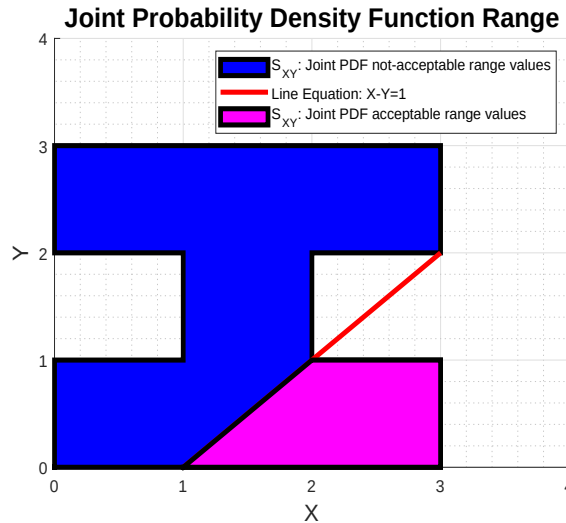
Επομένως, για την σταθερά c θα ισχύει:

$$c \cdot E_{S_{XY}} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{E_{S_{XY}}} \Leftrightarrow c = \frac{1}{7}$$

Άρα, τελικά, η από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_{XY}(x, y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & (x, y) \in S_{XY} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, με βάση το Σχήμα 4, έχουμε:

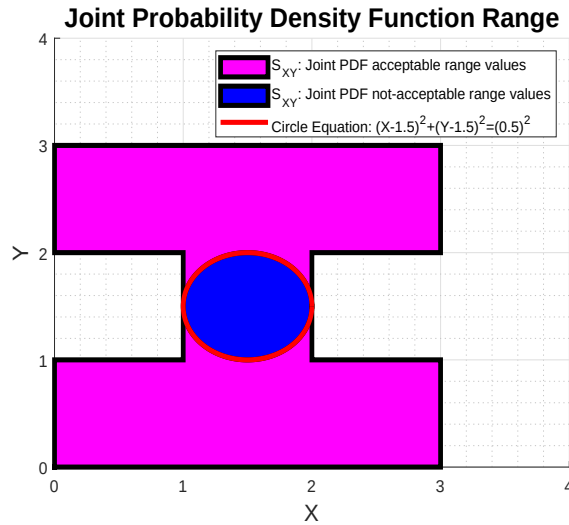


Σχήμα 4: Γραφικός υπολογισμός της $P(Y < X - 1)$.

$$P(Y < X - 1) = c \cdot E_{\text{Τραπεζίου}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{(1+2) \cdot 1}{2} = \frac{3}{14}$$

- (iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ουσιαστικά χρειάζεται να υπολογίσουμε την πιθανότητα να βρεθούμε εκτός του κύκλου με κέντρο το $K(1.5, 1.5)$ και ακτίνα $\rho = 0.5$. Οπότε, με βάση το Σχήμα 5, έχουμε:

$$\begin{aligned} P[(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 > (0.5)^2] &= 1 - P[(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 \leq (0.5)^2] = 1 - c \cdot E_{\text{Κύκλου}} \\ &= 1 - \frac{1}{7} \cdot \pi \rho^2 = 1 - \frac{1}{7} \cdot \pi (0.5)^2 = 1 - \frac{1}{7} \cdot 0.25\pi = 1 - 0.0357\pi \approx 1 - 0.1122 = 0.8878 \end{aligned}$$



Σχήμα 5: Γραφικός υπολογισμός της $P[(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 > (0.5)^2]$.

- (iv) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X , Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

Για $x < 0$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = 0$$

Για $0 \leq x < 1$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^1 \frac{1}{7} dy + \int_2^3 \frac{1}{7} dy = \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_0^1 + \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_2^3 = \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{2}{7}$$

Για $1 \leq x < 2$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^3 \frac{1}{7} dy = \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_0^3 = \frac{1}{7} \cdot 3 = \frac{3}{7}$$

Για $2 \leq x < 3$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^1 \frac{1}{7} dy + \int_2^3 \frac{1}{7} dy = \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_0^1 + \frac{1}{7} \cdot \left[y \right]_2^3 = \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{2}{7}$$

Για $x \geq 3$ έχουμε ότι:

$$f_X(x) = 0$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{7} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{7} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{7} & 2 \leq x < 3 \\ 0 & x \geq 3 \end{cases}$$