

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 6

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Άσκηση 1.

Έστω X η μικτή τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των ωρών που αφιερώνει κάποιος φοιτητής κάθε βδομάδα στο ΗΥ-217. Η Α.Σ.Κ της X είναι:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1+x}{8}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{8}, & 2 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

Δώστε τη γραφική παράσταση της $F_X(x)$

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(α) Αφιερώνει ακριβώς 2 ώρες

(β) Αφιερώνει περισσότερο από 2 ώρες

(γ) Αφιερώνει λιγότερο από 2 ώρες

(δ) Αφιερώνει ακριβώς 3 ώρες

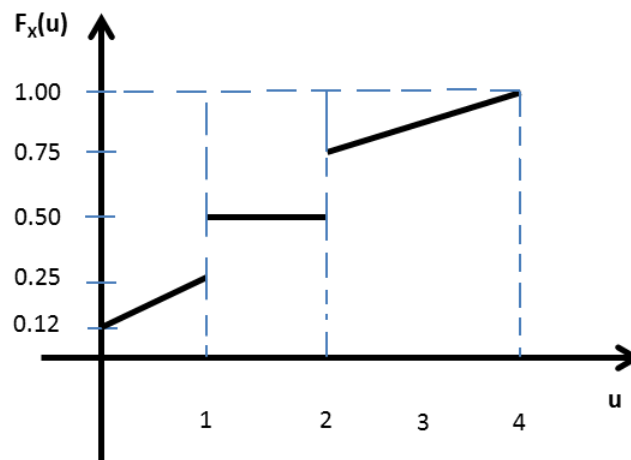
(ε) Αφιερώνει περισσότερο από 1/2 αλλά λιγότερες από 3 ώρες

(στ) Αφιερώνει περισσότερο από 2 ώρες, δεδομένου ότι ασχολείται με το μάθημα

(ζ) Να υπολογισθεί η μέση τιμή της τ.μ. X , $E[X]$

Λύση

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$, φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της Α.Σ.Κ

(α)

$$P(\text{Αφιερώνει ακριβώς 2 ώρες}) = P(X = 2) = F_X(2^+) - F_X(2^-) = \frac{1}{2} + \frac{2}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(β)

$$P(\text{Αφιερώνει περισσότερο από 2 ώρες}) = P(X > 2) = 1 - F_X(2^+) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

(γ)

$$P(\text{Αφιερώνει λιγότερο από 2 ώρες}) = P(X < 2) = F_X(2^-) = \frac{1}{2}$$

(δ)

$$P(\text{Αφιερώνει ακριβώς 3 ώρες}) = P(X = 3) = F_X(3^+) - F_X(3^-) = 0$$

(ε)

$$P(\text{Αφιερώνει περισσότερο από 1/2 αλλά λιγότερες από 3 ώρες}) = P(1/2 < X < 3) = F_X(3^-) - F_X(1/2^-) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1 + 1/2}{8} = \frac{11}{16}$$

(στ)

$$\begin{aligned} P(\text{Αφιερώνει περισσότερο από 2 ώρες, δεδομένου ότι ασχολείται με το μάθημα}) &= \frac{P(X > 2 \cap X > 0)}{P(X > 0)} = \frac{P(X > 2)}{P(X > 0)} = \\ &= \frac{1 - F_X(2^+)}{1 - F_X(0^+)} = \frac{1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{8}}{1 - \frac{1+0}{8}} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Σ Η μέση τιμή της τ.μ X , $E[X]$ μπορεί να βρεθεί υπολογίζοντας το εμβαδόν E μεταξύ της $F_X(u)$ και της ευθείας με ύψος ίσο με 1.

Επομένως έχουμε:

$$E = E_{\text{τραπεζίου}} + E_{\text{ορθογωνίου}} + E_{\text{τριγώνου}} = \frac{7/8 + 6/8}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 1/2 + \frac{1/4 \cdot 2}{2} = \frac{25}{16} = 1,375 \text{ ώρες.}$$

Άσκηση 2.

Μια συνεχής τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(1 - 0.1|x|), & |x| \leq 10 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$ και να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς α .

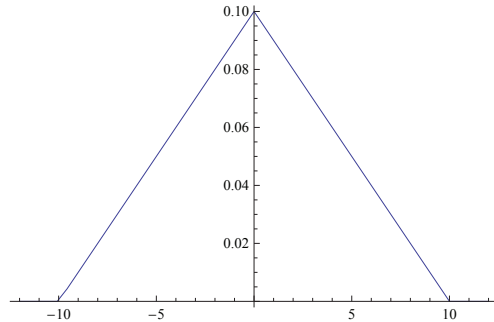
(β) Να βρεθούν η μέση τιμή $E[X]$ και η διασπορά σ_X^2 της τ.μ X

(γ) Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Α.Σ.Κ.), $F_X(x)$ της X και να σχεδιαστεί η γραφική της παράσταση.

(δ) Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου: $P(|X| \leq 3)$

Λύση.

(α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας παριστάνεται στο παρακάτω σχήμα, σχ. 2



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.

Από το σχήμα έχουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

$$\begin{aligned} E &= 20 \cdot \alpha \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ 1 &= 10 \cdot \alpha \Leftrightarrow \\ \alpha &= 0.1 \end{aligned}$$

Διαφορετικά, θα πρέπει να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \Leftrightarrow \quad (2)$$

$$\alpha \int_{-10}^0 1 + 0.1x dx + \alpha \int_0^{10} 1 - 0.1x dx = 1 \quad (3)$$

$$\alpha \cdot \left(\left[x + 0.1 \frac{x^2}{2} \right]_{-10}^0 + \left[x - 0.1 \frac{x^2}{2} \right]_0^{10} \right) = 1 \quad (4)$$

$$10\alpha = 1 \quad (5)$$

$$\alpha = 0.1 \quad (6)$$

(β) Εφόσον η $f_X(\cdot)$ είναι άρτια συνάρτηση, ισχύει ότι $E[X] = 0$. Επιπλέον:

$$\begin{aligned} var(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - 0 = 2 \int_0^{10} x^2 \cdot 0.1(1 - 0.1x) dx = \\ &= 0.2 \int_0^{10} x^2 - 0.1x^3 dx = \\ &= 0.2 \left[\frac{x^3}{3} - 0.1 \frac{x^4}{4} \right]_0^{10} = \frac{50}{3} \approx 16.67 \end{aligned}$$

(γ) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής δίνεται από: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$

Θεωρούμε τις περιπτώσεις:

(i) Για $x < -10 \Leftrightarrow F_X(x) = 0$

(ii) Για $-10 \leq x < 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-10}^x 0.1(1 + 0.1 \cdot t) dt = \int_{-10}^x (0.1 + 0.1^2 \cdot t) dt = 0.1t + 0.01 \frac{t^2}{2} \Big|_{-10}^x = \\ &= 0.1x + 0.01 \frac{x^2}{2} + 0.1 \cdot 10 - 0.01 \frac{(-10)^2}{2} = \\ &= 0.005x^2 + 0.1 \cdot x + 1 - 1/2 = \\ &= 0.005x^2 + 0.1 \cdot x + 1/2 = \\ &= 0.005 \cdot (x^2 + 20x + 100) = \\ &= 0.005(x + 10)^2 \end{aligned}$$

(iii) Για $0 \leq x < 10 \Leftrightarrow$

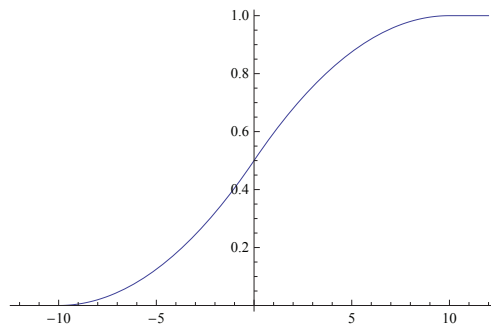
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-10}^0 0.1 \cdot (1 + 0.1 \cdot t) dt + \int_0^x 0.1 \cdot (1 - 0.1 \cdot t) dt = \\ &= \left[0.1 \cdot t + 0.1^2 \frac{t^2}{2} \right]_{-10}^0 + \left[0.1 \cdot t - 0.1^2 \frac{t^2}{2} \right]_0^x = \\ &= 0.1 \cdot 10 - 0.1^2 \frac{100}{2} + 0.1 \cdot x - 0.1^2 \frac{x^2}{2} = \\ &= -0.005x^2 + 0.1 \cdot x + 1 - 1/2 = \\ &= 1 - 0.005(x - 10)^2 \end{aligned}$$

(iv) Για $x \geq 10 \Leftrightarrow F_X(x) = 1$

Επομένως, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & , x < -10 \\ 0.005(x + 10)^2 & , x \in [-10, 0), \\ 1 - 0.005(x - 10)^2 & , x \in [0, 10), \\ 1 & , x \geq 10 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής φαίνεται στο παρακάτω σχήμα3



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$.

(δ) Έχουμε ότι:

$$P(|X| \leq 3) = P(-3 \leq X \leq 3) = F_X(3) - F_X(-3) = 1 - 0.005(3 - 10)^2 - 0.005(-3 + 10)^2 \approx 0.51$$