

Άσκηση 1

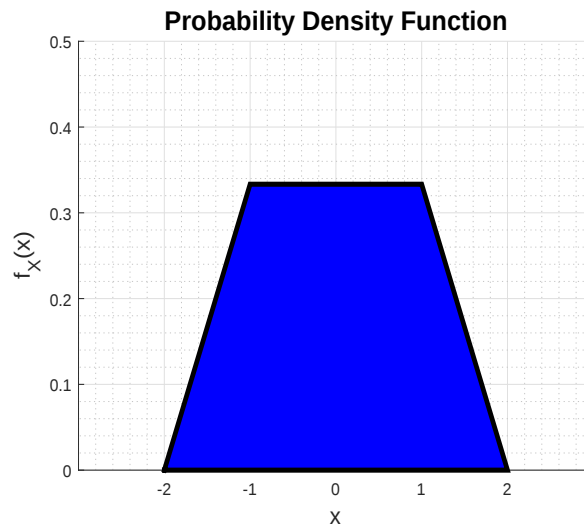
Έστω X συνεχής Τ.Μ. με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \frac{1}{3}(x+2) & -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{3} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}(-x+2) & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

- (i) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.
- (ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2)$.
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \mid 0 \leq X \leq 2)$.
- (iv) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$.

Λύση

- (i) Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-2, 2]$) που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

Παρατήρηση: Η $f_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{-2} f_X(x)dx + \int_{-2}^2 f_X(x)dx + \int_2^{+\infty} f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^2 f_X(x)dx + \int_2^{+\infty} 0dx = \int_{-2}^2 f_X(x)dx = \frac{(4+2) \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{6 \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

, όπου το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$ υπολογίστηκε ως το εμβαδόν μεταξύ του γραμμοσκιασμένου τραπεζίου στο Σχήμα 1 και του άξονα x'x. Εναλλακτικά, θα μπορούσε να υπολογιστεί με χρήση τεχνικών ολοκλήρωσης ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{-2} f_X(x)dx + \int_{-2}^{-1} f_X(x)dx + \int_{-1}^1 f_X(x)dx + \int_1^2 f_X(x)dx + \int_2^{+\infty} f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(x+2)dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx + \int_2^{+\infty} 0dx \\ &= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(x+2)dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{-1} + \frac{2}{3} \left[x \right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{3} \left[x \right]_{-1}^1 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \frac{2}{3} \left[x \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) + \frac{2}{3} (-1 + 2) + \frac{1}{3} (1 + 1) - \frac{1}{3} \left(2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} (2 - 1) \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{2} \right) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{6}{3} - \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

- (ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2\right) &= \int_{\frac{3}{2}}^2 f_X(x)dx = \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx = -\frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{2}{3} \left[x \right]_{\frac{3}{2}}^2 \\ &= -\frac{1}{3} \left(2 - \frac{9}{8} \right) + \frac{2}{3} \left(2 - \frac{3}{2} \right) = -\frac{1}{3} \left(\frac{7}{8} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{7}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

- (iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \mid 0 \leq X \leq 2\right) &= \frac{P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2, 0 \leq X \leq 2\right)}{P(0 \leq X \leq 2)} = \frac{P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2\right)}{P(0 \leq X \leq 2)} = \frac{\int_{\frac{3}{2}}^2 f_X(x)dx}{\int_0^2 f_X(x)dx} \\ &= \frac{\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx}{\int_0^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^2 \frac{1}{3}(-x+2)dx} = \frac{-\frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{2}{3} \left[x \right]_{\frac{3}{2}}^2}{\frac{1}{3} \left[x \right]_0^1 + \left(-\frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \frac{2}{3} \left[x \right]_1^2 \right)} = \frac{-\frac{7}{24} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

- (iv) Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < -2 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$

(b) Για $-2 \leq x < -1 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^x \frac{1}{3}(t+2)dt = \int_{-2}^x \frac{1}{3}(t+2)dt = \frac{1}{3} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-2}^x + \frac{2}{3} \left[t \right]_{-2}^x \\ &= \frac{x^2}{6} - \frac{4}{6} + \frac{2x}{3} - \left(\frac{-4}{3} \right) = \frac{x^2}{6} - \frac{2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{4}{3} = \frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}(x^2 + 4x + 4) = \frac{1}{6}(x+2)^2 \end{aligned}$$

(c) Για $-1 \leq x < 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(t+2)dt + \int_{-1}^x \frac{1}{3}dt = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(t+2)dt + \int_{-1}^x \frac{1}{3}dt \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-2}^{-1} + \frac{2}{3} \left[t \right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{3} \left[t \right]_{-1}^x = \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{6} \right) + \left(\frac{-2}{3} + \frac{4}{3} \right) + \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3} \right) = -\frac{3}{6} + \frac{x}{3} + 1 = \frac{x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}(2x+3) \end{aligned}$$

(d) Για $1 \leq x < 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(t+2)dt + \int_{-1}^1 \frac{1}{3}dt + \int_1^x \frac{1}{3}(-t+2)dt \\ &= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(t+2)dt + \int_{-1}^1 \frac{1}{3}dt + \int_1^x \frac{1}{3}(-t+2)dt = \frac{1}{3} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-2}^{-1} + \frac{2}{3} \left[t \right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{3} \left[t \right]_{-1}^1 - \frac{1}{3} \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^x + \frac{2}{3} \left[t \right]_1^x \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) + \frac{2}{3} (-1+2) + \frac{1}{3} (1+1) - \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} (x-1) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2x}{3} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} + \frac{2}{6} = -\frac{x^2}{6} - \frac{4x}{6} - \frac{2}{6} = -\frac{1}{6}(x^2 - 4x - 2) \end{aligned}$$

(e) Για $x \geq 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(t+2)dt + \int_{-1}^1 \frac{1}{3}dt + \int_1^2 \frac{1}{3}(-t+2)dt + \int_2^{+\infty} 0dt \\ &= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(t+2)dt + \int_{-1}^1 \frac{1}{3}dt + \int_1^2 \frac{1}{3}(-t+2)dt = \frac{1}{3} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-2}^{-1} + \frac{2}{3} \left[t \right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{3} \left[t \right]_{-1}^1 - \frac{1}{3} \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^2 + \frac{2}{3} \left[t \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) + \frac{2}{3} (-1+2) + \frac{1}{3} (1+1) - \frac{1}{3} \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} (2-1) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{2} = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \frac{1}{6}(x+2)^2 & -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{6}(2x+3) & -1 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{6}(x^2 - 4x - 2) & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Άσκηση 2

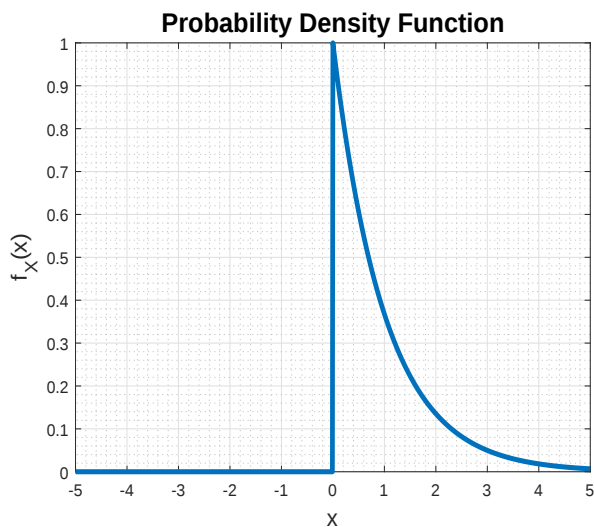
Έστω ότι η διάρκεια ζωής σε χρόνια μίας οθόνης Η/Υ μοντελοποιείται ως μία συνεχής Τ.Μ. X , με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας PDF που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

- (i) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.
- (ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(1 \leq X \leq 2)$.
- (iv) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (v) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \geq 1)$.

Λύση

- (i) Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

- (ii) Η $f_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f_X(x)dx + \int_0^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -\left[e^{-x}\right]_0^{+\infty} = -(0 - 1) = 1 \end{aligned}$$

- (iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f_X(x) dx = \int_1^2 e^{-x} dx = -\left[e^{-x}\right]_1^2 = e^{-1} - e^{-2}$$

- (iv) Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$

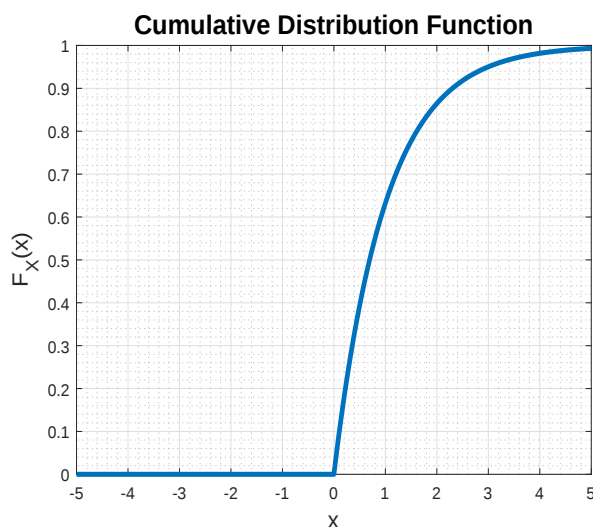
(b) Για $x \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t) dt + \int_0^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x e^{-t} dt \\ &= \int_0^x e^{-t} dt = -\left[e^{-t}\right]_0^x = -(e^{-x} - e^0) = 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $F_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής $F_X(x)$.

- (v) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(X \geq 1) = \int_1^{+\infty} f_X(x) dx = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -\left[e^{-x}\right]_1^{+\infty} = e^{-1}$$

Άσκηση 3

Ένας μεγιστάνας θα ζήσει ακόμα ένα χρονικό διάστημα σε έτη, το οποίο μοντελοποιείται ως μία συνεχής T.M. X με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας PDF που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} -2x + 2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ο μεγιστάνας παντρεύεται μια νεαρή ηθοποιό, και συνάπτουν προγαμιαίο συμβόλαιο που προβλέπει πως όταν αυτός πεθάνει η ηθοποιός θα εισπράξει κληρονομιά (σε εκατομμύρια ευρώ) που μοντελοποιείται ως T.M. Y που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$Y = 10 \cdot X + 2$$

- (i) Να υπολογιστεί το μέσο διάστημα ζωής που απομένει ακόμα στον μεγιστάνα πριν πεθάνει.
- (ii) Να υπολογιστεί η διασπορά της T.M. X , $VAR[X]$.
- (iii) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της κληρονομιάς (σε εκατομμύρια ευρώ) που θα εισπράξει η ηθοποιός, όταν ο μεγιστάνας πεθάνει.

Λύση

- (i) Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, ζητείται να υπολογιστεί η μέση τιμή της T.M. X , $E[X]$. Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot (-2x + 2) dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx \\ &= -2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[x^2 \right]_0^1 = -2 \left(\frac{1}{3} - 0 \right) + (1 - 0) = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- (ii) Για τον υπολογισμό της διασποράς της T.M. X , $VAR[X]$, θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή από την θεωρία σχέση:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Για τον υπολογισμό της ροπής 2^{ας} τάξεως, $E[X^2]$, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot (-2x + 2) dx = \int_0^1 (-2x^3 + 2x^2) dx \\ &= -2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -2 \left(\frac{1}{4} - 0 \right) + 2 \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Άρα, η διασπορά της T.M. X , $VAR[X]$ θα είναι τελικά:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

- (iii) Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, ζητείται να υπολογιστεί η μέση τιμή της T.M. Y , $E[Y]$. Εκμεταλλευόμενοι την γραμμική σχέση που συνδέει τις T.M. X και Y (και κάνοντας χρήση της αντίστοιχης ιδιότητας), έχουμε:

$$E[Y] = E[10 \cdot X + 2] = 10 \cdot E[X] + 2 = 10 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{16}{3} \approx 5.333$$

Άσκηση 4

Έστω συνεχής Τ.Μ. X , με Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$F_X(x) = \begin{cases} c - \frac{4}{x^2} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

, όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστούν:

- (i) Η σταθερά c .
- (ii) Η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) της Τ.Μ. X , $f_X(x)$.
- (iii) Η μέση τιμή της Τ.Μ. X , $E[X]$.

Λύση

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που δίνεται η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής μίας Τ.Μ. X , και όχι η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας αυτής, η Συνθήκη Κανονικοποίησης λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \end{cases}$$

- (i) Σύμφωνα με την θεωρία, θα πρέπει να ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης. Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(c - \frac{4}{x^2} \right) = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$$

Άρα, τελικά, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF) θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{x^2} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

- (ii) Με γνωστή την Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

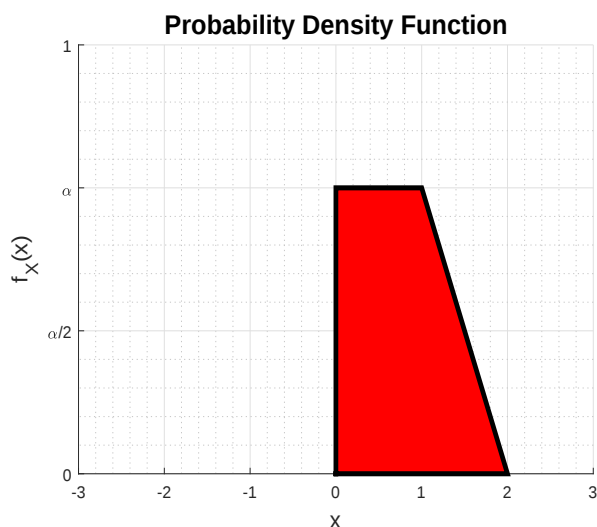
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

- (iii) Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_2^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_2^{+\infty} x \cdot \left(\frac{8}{x^3}\right) dx \\
 &= \int_2^{+\infty} \frac{8}{x^2} dx = 8 \left[-\frac{1}{x} \right]_2^{+\infty} = 8(0 + \frac{1}{2}) = \frac{8}{2} = 4
 \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Έστω συνεχής Τ.Μ. X , με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) η γραφική παράσταση της οποίας (περιορισμένη στο διάστημα $[-3, 3]$) φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

, όπου α σταθερά με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστούν:

- (i) Η σταθερά α .
- (ii) Η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$.
- (iii) Η μέση τιμή της Τ.Μ. X , $E[X]$.
- (iv) Η διασπορά της Τ.Μ. X , $VAR[X]$.

Λύση

- (i) Αρχικά, προσδιορίζουμε τον τύπο της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, με βάση το Σχήμα 4. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha & 0 \leq x \leq 1 \\ c \cdot x + d & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η $f_X(x)$, εκτός από την προσδιοριστέα σταθερά α , εκφράζεται επιπλέον συναρτήσει των παραμέτρων c, d . Ως εκ τούτου, οι παράμετροι c, d θα πρέπει να εκφραστούν συναρτήσει της σταθεράς α , με βάση του τύπο της $f_X(x)$.

Με βάση το Σχήμα 4, παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} f_X(1) = \alpha \Rightarrow c + d = \alpha \\ f_X(2) = 0 \Rightarrow 2 \cdot c + d = 0 \end{cases}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τα c, d , βρίσκουμε ότι:

$$\begin{cases} c = -\alpha \\ d = 2\alpha \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τα c, d , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha & 0 \leq x \leq 1 \\ -\alpha x + 2\alpha & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

Για να είναι η $f_X(x)$ είναι μία *έγκυρη* Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx + \int_0^1 f_X(x) dx + \int_1^2 f_X(x) dx + \int_2^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 \alpha dx + \int_1^2 (-\alpha x + 2\alpha) dx + \int_2^{+\infty} 0 dx = 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \left[x \right]_0^1 - \alpha \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + 2\alpha \cdot \left[x \right]_1^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha \cdot (1 - 0) - \alpha \cdot \left(2 - \frac{1}{2} \right) + 2\alpha \cdot (2 - 1) = 1 \Leftrightarrow \alpha - \frac{3\alpha}{2} + 2\alpha = 1 \Leftrightarrow 3\alpha - \frac{3\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η προσδιοριστέα σταθερά α θα μπορούσε να υπολογιστεί εναλλακτικά, απαιτώντας το εμβαδόν μεταξύ της $f_X(x)$ και του άξονα $x'x$ να ισούται με 1:

$$E_{\text{Τραπεζίου}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(2+1) \cdot \alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

- (ii) Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$

(b) Για $0 \leq x < 1 \Leftrightarrow$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x \frac{2}{3}dt = \int_0^x \frac{2}{3}dt = \frac{2}{3} \left[t \right]_0^x = \frac{2x}{3}$$

(c) Για $1 \leq x < 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 \frac{2}{3}dt + \int_1^x \left(-\frac{2}{3}t + \frac{4}{3}\right)dt = \int_0^1 \frac{2}{3}dt + \int_1^x \left(-\frac{2}{3}t + \frac{4}{3}\right)dt \\ &= \frac{2}{3} \left[t \right]_0^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^x + \frac{4}{3} \left[t \right]_1^x = \frac{2}{3}(1-0) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{4}{3}(x-1) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4x}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{x^2}{3} + \frac{4x}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(-x^2 + 4x - 1) = -\frac{1}{3}(x^2 - 4x + 1) \end{aligned}$$

(d) Για $x \geq 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 \frac{2}{3}dt + \int_1^2 \left(-\frac{2}{3}t + \frac{4}{3}\right)dt + \int_2^x 0dt = \int_0^1 \frac{2}{3}dt + \int_1^2 \left(-\frac{2}{3}t + \frac{4}{3}\right)dt \\ &= \frac{2}{3} \left[t \right]_0^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^2 + \frac{4}{3} \left[t \right]_1^2 = \frac{2}{3}(1-0) - \frac{2}{3} \left(2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{4}{3}(2-1) = \frac{2}{3} - 1 + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2x}{3} & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{3}(x^2 - 4x + 1) & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

(iii) Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0dx + \int_0^1 x \cdot \frac{2}{3}dx + \int_1^2 x \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right)dx + \int_2^{+\infty} x \cdot 0dx \\ &= \int_0^1 x \cdot \frac{2}{3}dx + \int_1^2 x \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right)dx = \int_0^1 \frac{2}{3}xdx + \int_1^2 \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\right)dx \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + \frac{4}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) + \frac{4}{3} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} - \frac{14}{9} + 2 = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

(iv) Για τον υπολογισμό της διασποράς της Τ.Μ. X , $VAR[X]$, θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή από την θεωρία σχέση:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Για τον υπολογισμό της ροπής 2^{ας} τάξεως, $E[X^2]$, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 dx + \int_0^1 x^2 \cdot \frac{2}{3} dx + \int_1^2 x^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right) dx + \int_2^{+\infty} x^2 \cdot 0 dx \\ &= \int_0^1 x^2 \cdot \frac{2}{3} dx + \int_1^2 x^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right) dx = \int_0^1 \frac{2}{3} x^2 dx + \int_1^2 \left(-\frac{2}{3} x^3 + \frac{4}{3} x^2\right) dx \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 + \frac{4}{3} \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} - 0\right) - \frac{2}{3} \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{4}{3} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} - \frac{30}{12} + \frac{28}{9} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Άρα, η διασπορά της Τ.Μ. X , $VAR[X]$ θα είναι τελικά:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{5}{6} - \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{5}{6} - \frac{49}{81} = \frac{111}{486} = \frac{37}{162}$$

Άσκηση 6

Έστω X συνεχής Τ.Μ. με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in (0, c) \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus (0, c) \end{cases}$$

, όπου c σταθερά με $c > 0$. Να υπολογιστούν:

- (i) Η σταθερά c .
- (ii) Η πιθανότητα $P(X \geq 1)$.
- (iii) Η πιθανότητα $P(X = 1)$.
- (iv) Η διασπορά της Τ.Μ. X , $VAR[X]$.

Λύση

- (i) Για να είναι η $f_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx + \int_0^c f_X(x) dx + \int_c^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^c \frac{x}{2} dx + \int_c^{+\infty} 0 dx &= 1 \Leftrightarrow \int_0^c \frac{x}{2} dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^c = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{2} - 0\right) = 1 \Leftrightarrow \\ &\frac{c^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = 2} \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in (0, 2) \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus (0, 2) \end{cases}$$

- (ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(X \geq 1) = \int_1^{+\infty} f_X(x)dx = \int_1^2 f_X(x)dx = \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

(iii) Εφ' όσον η X είναι συνεχής Τ.Μ., $P(X = 1) = 0$.

(iv) Για τον υπολογισμό της διασποράς της Τ.Μ. X , $VAR[X]$, θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή από την θεωρία σχέση:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f_X(x) dx + \int_0^2 x f_X(x) dx + \int_2^{+\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx + \int_2^{+\infty} x \cdot 0 dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} - 0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της ροπής 2^{ας} τάξεως, $E[X^2]$, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 f_X(x) dx + \int_0^2 x^2 f_X(x) dx + \int_2^{+\infty} x^2 f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 dx + \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx + \int_2^{+\infty} x^2 \cdot 0 dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{4} - 0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{4} \right) = \frac{16}{8} = 2 \end{aligned}$$

Άρα, η διασπορά της Τ.Μ. X , $VAR[X]$ θα είναι τελικά:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2 - \left(\frac{4}{3} \right)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

Άσκηση 7

Έστω X συνεχής Τ.Μ. που ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, με $E[X] = 6$ και $P(X < 5) = 0.4$.

(i) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.

(ii) Η πιθανότητα $P(X \geq 8)$.

Λύση

(i) **Παρατήρηση:** Σε αυτή την άσκηση μας δίνεται η κατανομή που ακολουθεί η Τ.Μ. X , χωρίς όμως να προσδιορίζεται το διάστημα $[a, b]$ στο οποίο ακολουθεί αυτή την κατανομή. Τα άκρα του εν λόγω διαστήματος (a, b) θα υπολογιστούν με βάση τα δεδομένα της άσκησης.

Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επίσης, είναι γνωστό πως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, η μέση τιμή της δίνεται από τον τύπο:

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $E[X] = 6$ από την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$E[X] = 6 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 6 \Rightarrow a+b = 12$$

Ακόμη, με βάση την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X < 5) = 0.4 &\Rightarrow \int_{-\infty}^5 f_X(x)dx = 0.4 \Rightarrow \int_{-\infty}^a f_X(x)dx + \int_a^5 f_X(x)dx = 0.4 \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^a 0dx + \int_a^5 \frac{1}{b-a}dx = 0.4 \Rightarrow \int_a^5 \frac{1}{b-a}dx = 0.4 \\ &\Rightarrow \frac{1}{b-a} \left[x \right]_a^5 = 0.4 \Rightarrow \frac{1}{b-a} (5-a) = 0.4 \Rightarrow 5-a = 0.4b - 0.4a \Rightarrow 0.6a + 0.4b = 5 \end{aligned}$$

Επιλύοντας το παρακάτω σύστημα εξισώσεων που προκύπτει:

$$\begin{cases} a+b = 12 \\ 0.6a + 0.4b = 5 \end{cases}$$

, με αγνώστους τα a, b , βρίσκουμε ότι:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 11 \end{cases}$$

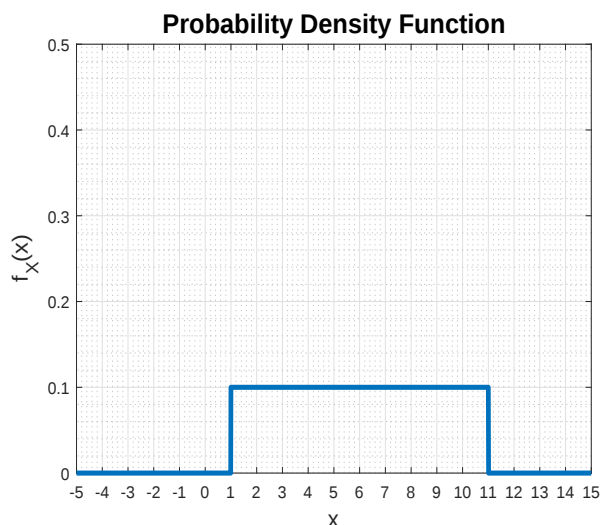
Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 1 \leq x \leq 11 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 15]$) που φαίνεται στο Σχήμα 5.

Παρατήρηση: Η $f_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^1 f_X(x)dx + \int_1^{11} f_X(x)dx + \int_{11}^{+\infty} f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^1 0dx + \int_1^{11} \frac{1}{10}dx + \int_{11}^{+\infty} 0dx = \int_1^{11} \frac{1}{10}dx = \int_1^{11} \frac{1}{10} \left[x \right]_1^{11} = \frac{1}{10} (11-1) = \frac{10}{10} = 1 \end{aligned}$$

Σχήμα 5: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

- (ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 8) &= \int_8^{+\infty} f_X(x) dx = \int_8^{11} f_X(x) dx + \int_{11}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_8^{11} \frac{1}{10} dx + \int_{11}^{+\infty} 0 dx = \int_8^{11} \frac{1}{10} dx \\
 &= \frac{1}{10} \left[x \right]_8^{11} = \frac{1}{10} (11 - 8) = \frac{1}{10} (3) = 0.3
 \end{aligned}$$

Άσκηση 8

Προϊόν βιομηχανίας συσκευάζεται σε πακέτα. Το βάρος ενός πακέτου είναι συνεχής Τ.Μ. X , η οποία ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[8, 12]$. Το κόστος παραγωγής κάθε πακέτου είναι Τ.Μ. Y , για την οποία ισχύει η σχέση:

$$Y = 0.1X + 100$$

Αν ένα πακέτο έχει βάρος $\geq 9Kg$ τότε πωλείται προς 150 ευρώ, ενώ αν έχει βάρος $< 9Kg$ τότε πωλείται προς 80 ευρώ. Να υπολογιστεί η μέση τιμή του κέρδους για κάθε πακέτο.

Λύση

Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Με βάση τα δεδομένα της άσκησης, έχουμε $a = 8$, $b = 12$. Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 8 \leq x \leq 12 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την μέση τιμή του κέρδους για κάθε πακέτο, πρέπει να υπολογίσουμε το κέρδος για κάθε πακέτο ανάλογα με το βάρος του. Πιο συγκεκριμένα, το Κέρδος ($K(X)$) για κάθε πακέτο θα δίνεται με βάση την παρακάτω σχέση:

$$K(X) = \text{Τιμή-Πώλησης}(X) - \text{Κόστος Παραγωγής}(X)$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης, θα έχουμε λοιπόν:

- Αν $X < 9Kg \Rightarrow K_1(X) = 80 - (0.1X + 100)$
- Αν $X \geq 9Kg \Rightarrow K_2(X) = 150 - (0.1X + 100)$

Άρα, το κέρδος από κάθε πακέτο θα δίνεται τελικά από την σχέση:

$$K(x) = \begin{cases} K_1(x) = 80 - (0.1x + 100) & X < 9 \\ K_2(x) = 150 - (0.1x + 100) & X \geq 9 \end{cases}$$

Με βάση τον τύπο ορισμού και τις ιδιότητες της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[K(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x)f_X(x)dx = \int_{-\infty}^8 K(x) \cdot 0dx + \int_8^{12} K(x) \cdot \frac{1}{4}dx + \int_{12}^{+\infty} K(x) \cdot 0dx \\ &= \int_8^{12} K(x) \cdot \frac{1}{4}dx = \int_8^9 K_1(x) \cdot \frac{1}{4}dx + \int_9^{12} K_2(x) \cdot \frac{1}{4}dx \\ &= \frac{1}{4} \int_8^9 (80 - (0.1x + 100))dx + \frac{1}{4} \int_9^{12} (150 - (0.1x + 100))dx = \frac{1}{4} \int_8^9 (-0.1x - 20)dx + \frac{1}{4} \int_9^{12} (-0.1x + 50)dx \\ &= \frac{1}{4} \left(-0.1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_8^9 - 20 \left[x \right]_8^9 \right) + \frac{1}{4} \left(-0.1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_9^{12} + 50 \left[x \right]_9^{12} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[-0.1 \left(\frac{81}{2} - \frac{64}{2} \right) - 20(9 - 8) \right] + \frac{1}{4} \left[-0.1 \left(\frac{144}{2} - \frac{81}{2} \right) + 50(12 - 9) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[-0.1 \left(\frac{17}{2} \right) - 20 \right] + \frac{1}{4} \left[-0.1 \left(\frac{63}{2} \right) + 150 \right] = \frac{1}{4} \left[-0.1 \left(\frac{17}{2} + \frac{63}{2} \right) + 130 \right] = \frac{1}{4} \left[-0.1(40) + 130 \right] \\ &= \frac{1}{4}(-4 + 130) = \frac{126}{4} = \frac{63}{2} = 31.5 \end{aligned}$$

Άσκηση 9

Έστω ότι ο συρμός φτάνει σε έναν συγκεκριμένο σταθμό του μετρό κάθε 10 λεπτά, ξεκινώντας τα δρομολόγιά του στις 05 : 00. Αν ένας επιβάτης φθάνει στον σταθμό σε χρόνο ο οποίος κατανέμεται ομοιόμορφα στο χρονικό διάστημα $[07 : 20, 07 : 40]$, να υπολογιστούν οι πιθανότητες να περιμένει τον συρμό:

- Το πολύ 4 λεπτά.
- Τουλάχιστον 7 λεπτά.

Λύση

Έστω X συνεχής Τ.Μ., η οποία αντιπροσωπεύει τον χρόνο άφιξης του επιβάτη στον σταθμό, και μετράται σε λεπτά ξεκινώντας από την χρονική στιγμή 07 : 20. Με βάση τα δεδομένα της άσκησης, η X θα ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 20]$, με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (i) Για να περιμένει ο επιβάτης το πολύ 4 λεπτά, σημαίνει πως φθάνει στον σταθμό είτε στο χρονικό διάστημα $[07 : 26, 07 : 30]$ είτε στο χρονικό διάστημα $[07 : 36, 07 : 40]$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$\begin{aligned} P_1 &= P(6 \leq X \leq 10) + P(16 \leq X \leq 20) = \int_6^{10} f_X(x)dx + \int_{16}^{20} f_X(x)dx = \int_6^{10} \frac{1}{20}dx + \int_{16}^{20} \frac{1}{20}dx \\ &= \frac{1}{20} \left[x \right]_6^{10} + \frac{1}{20} \left[x \right]_{16}^{20} = \frac{1}{20}(10 - 6) + \frac{1}{20}(20 - 16) = \frac{1}{20}(4) + \frac{1}{20}(4) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4 \end{aligned}$$

- (ii) Για να περιμένει ο επιβάτης τουλάχιστον 7 λεπτά, σημαίνει πως φθάνει στον σταθμό είτε στο χρονικό διάστημα $[07 : 20, 07 : 23]$ είτε στο χρονικό διάστημα $[07 : 30, 07 : 33]$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$\begin{aligned} P_1 &= P(0 \leq X \leq 3) + P(10 \leq X \leq 13) = \int_0^3 f_X(x)dx + \int_{10}^{13} f_X(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{20}dx + \int_{10}^{13} \frac{1}{20}dx \\ &= \frac{1}{20} \left[x \right]_0^3 + \frac{1}{20} \left[x \right]_{10}^{13} = \frac{1}{20}(3 - 0) + \frac{1}{20}(13 - 10) = \frac{1}{20}(3) + \frac{1}{20}(3) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0.3 \end{aligned}$$

Άσκηση 10

Έστω συνεχής Τ.Μ. X , η οποία ακολουθεί την Εκθετική Κατανομή με $E[X] = 1$.

- (i) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$.
- (ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X < 1)$.
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \geq 1)$.
- (iv) Αν ισχύει η σχέση $P(X > c) = 0.95$, όπου c σταθερά με $c \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί η σταθερά c .

Λύση

- (i) Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Εκθετική Κατανομή, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Επίσης, είναι γνωστό πως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Εκθετική Κατανομή, η μέση τιμή της δίνεται από τον τύπο:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $E[X] = 1$ από την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$E[X] = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$

(b) Για $x \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t) dt + \int_0^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x e^{-t} dt \\ &= \int_0^x e^{-t} dt = -\left[e^{-t}\right]_0^x = -(e^{-x} - e^0) = 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

(ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(X < 1) = \int_{-\infty}^1 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 e^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = -\left[e^{-x}\right]_0^1 = -(e^{-1} - e^0) = 1 - e^{-1}$$

(iii) Εκμεταλλευόμενοι βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων, έχουμε:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - (1 - e^{-1}) = 1 - 1 + e^{-1} = e^{-1}$$

(iv) Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X > c) &= 0.95 \Rightarrow \int_c^{+\infty} f_X(x) dx = 0.95 \Rightarrow \int_c^{+\infty} e^{-x} dx = 0.95 \\ &\Rightarrow -\left[e^{-x}\right]_c^{+\infty} = 0.95 \Rightarrow -(0 - e^{-c}) = 0.95 \Rightarrow e^{-c} = 0.95 \\ &\Rightarrow -c = \ln(0.95) \Rightarrow c = -\ln(0.95) \Rightarrow c = -(-0.0513) \Rightarrow c = 0.0513 \end{aligned}$$

Άσκηση 11

Η διάρκεια ζωής, T , μίας μηχανής ακολουθεί Εκθετική Κατανομή. Η μέση διάρκεια ζωής είναι ίση με 100 μονάδες χρόνου.

- (i) Να βρεθεί η πιθανότητα να πάθει βλάβη η μηχανή μέσα σε 200 μονάδες χρόνου.
- (ii) Να βρεθούν οι μονάδες χρόνου t_0 , έτσι ώστε η διάρκεια ζωής της μηχανής να τις υπερβαίνει με πιθανότητα ίση με 0.3.

Λύση

- (i) Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Εκθετική Κατανομή, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Επίσης, είναι γνωστό πως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Εκθετική Κατανομή, η μέση τιμή της δίνεται από τον τύπο:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $E[X] = 100$ από την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$E[X] = 100 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 100 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$$

Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{100} e^{-\frac{1}{100}x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η διάρκεια ζωής, T , καθορίζει την χρονική στιγμή κατά την οποία εμφανίζεται η βλάβη. Άρα, στο διάστημα $0 \leq X < T$ δεν υπάρχει βλάβη.

Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, επιθυμούμε η διάρκεια ζωής της μηχανής να είναι μικρότερη από 200 χρονικές μονάδες. Η πιθανότητα με την οποία συμβαίνει αυτό θα είναι:

$$P = P(T < 200) = \int_0^{200} f_X(x) dx = \int_0^{200} \frac{1}{100} e^{-\frac{1}{100}x} dx = - \left[e^{-\frac{1}{100}x} \right]_0^{200} = -(e^{-2} - 1) = 1 - e^{-2}$$

- (ii) Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(T > t_0) &= 0.3 \Rightarrow \int_{t_0}^{+\infty} f_X(x) dx = 0.3 \Rightarrow \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{100} e^{-\frac{1}{100}x} dx = 0.3 \\ &\Rightarrow - \left[e^{-\frac{1}{100}x} \right]_{t_0}^{+\infty} = 0.3 \Rightarrow -(0 - e^{-\frac{t_0}{100}}) = 0.3 \Rightarrow e^{-\frac{t_0}{100}} = 0.3 \\ &\Rightarrow -\frac{t_0}{100} = \ln(0.3) \Rightarrow t_0 = -100 \ln(0.3) \Rightarrow t_0 = -100(-1.2040) \Rightarrow t_0 = 120.40 \end{aligned}$$

Άσκηση 12

Έστω X συνεχής Τ.Μ. με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

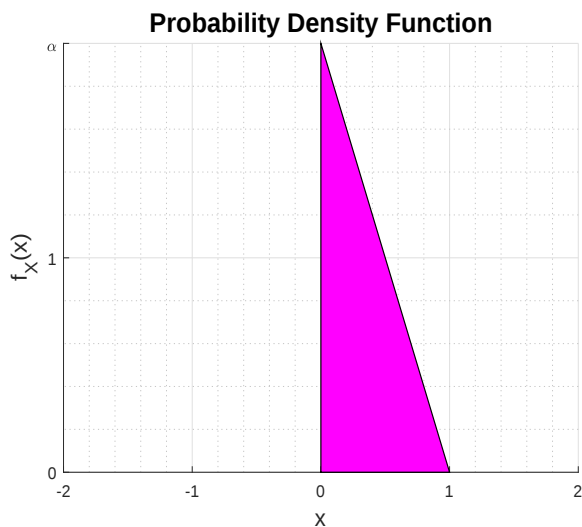
$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

, όπου α σταθερά με $\alpha \in \mathbb{R}$

- (i) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.
- (ii) Να υπολογιστεί η σταθερά α .
- (iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(6X^2 > 5X - 1)$.
- (iv) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$.

Λύση

- (i) Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-2, 2]$) που φαίνεται στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

- (ii) Για να είναι η $f_X(x)$ είναι μία *έγκυρη* Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx + \int_0^1 f_X(x) dx + \int_1^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 \alpha(1-x) dx + \int_1^{+\infty} 0 dx &= 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \alpha(1-x) dx = 1 \Leftrightarrow \alpha \left(\left[x \right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right) = 1 \\ \Leftrightarrow \alpha \left[\left(1 - 0 \right) - \left(\frac{1}{2} - 0 \right) \right] &= 1 \Leftrightarrow \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2} \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η προσδιοριστέα σταθερά a θα μπορούσε να υπολογιστεί εναλλακτικά, απαιτώντας το εμβαδόν μεταξύ της $f_X(x)$ και του άξονα $x'x$ να ισούται με 1:

$$E_{\text{Τριγώνου}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1 \cdot \alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(6X^2 > 5X - 1) &= P(6X^2 - 5X + 1 > 0) = P\left[6\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0\right] \\ &= P\left(X > 1/3 \cap X > 1/2\right) + P\left(X < 1/3 \cap X < 1/2\right) = P(X > 1/2) + P(X < 1/3) \\ &= \int_{1/2}^1 f_X(x)dx + \int_0^{1/3} f_X(x)dx = \int_{1/2}^1 2(1-x)dx + \int_0^{1/3} 2(1-x)dx \\ &= 2\left(\left[x\right]_{1/2}^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^1\right) + 2\left(\left[x\right]_0^{1/3} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/3}\right) = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)\right] + 2\left[\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{18} - 0\right)\right] \\ &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{18}\right) = 2\left(\frac{1}{8}\right) + 2\left(\frac{5}{18}\right) = \frac{1}{4} + \frac{5}{9} = \frac{29}{36} \end{aligned}$$

(iv) Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$

(b) Για $0 \leq x < 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t)dt + \int_0^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x 2(1-t)dt = \int_0^x 2(1-t)dt \\ &= 2\left(\left[t\right]_0^x - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x\right) = 2\left[\left(x - 0\right) - \left(\frac{x^2}{2} - 0\right)\right] = 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = -x^2 + 2x \end{aligned}$$

(c) Για $x \geq 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t)dt + \int_0^1 f_X(t)dt + \int_1^{+\infty} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 2(1-t)dt + \int_1^{+\infty} 0dt \\ &= \int_0^1 2(1-t)dt = 2\left(\left[t\right]_0^1 - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1\right) = 2\left[\left(1 - 0\right) - \left(\frac{1}{2} - 0\right)\right] = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -x^2 + 2x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$