

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 3

Άσκηση 1

(α) Να αποδειχτεί ότι αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, τότε είναι ανεξάρτητα και τα συμπληρωματικά τους ενδεχόμενα.

(β) Αν τα ενδεχόμενα A , B και Γ είναι ανεξάρτητα, να εξεταστεί αν είναι επίσης ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα:

(i) $A \cup B, \Gamma$

(ii) $A, B \cap \Gamma$

Λύση

(α) Εφόσον τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= P(A^c) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= P(A^c) - P(B)(1 - P(A)) \\ &= P(A^c)(1 - P(B)) \\ &= P(A^c)P(B^c) \end{aligned}$$

Επομένως, και τα συμπληρωματικά τους ενδεχόμενα (A^c και B^c) είναι ανεξάρτητα.

(β)

(i) Τα ενδεχόμενα A , B , Γ είναι ανεξάρτητα, οπότε ισχύει:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), P(A \cap \Gamma) = P(A)P(\Gamma), P(B \cap \Gamma) = P(B)P(\Gamma), P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma)$$

Για να είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα $A \cup B, \Gamma$ θα πρέπει να ισχύει:

$$P((A \cup B) \cap \Gamma) = P(\Gamma)P(A \cup B)$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap \Gamma) &= P((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)) = P(A \cap \Gamma) + P(B \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma) \\ &= P(A \cap \Gamma) + P(B \cap \Gamma) - P(A)P(B)P(\Gamma) \\ &= P(A)P(\Gamma) + P(B)P(\Gamma) - P(A)P(B)P(\Gamma) \\ &= P(\Gamma) [P(A) + P(B) - P(A)P(B)] \\ &= P(\Gamma)P(A \cup B) \end{aligned}$$

Άρα, τα ενδεχόμενα $A \cup B, \Gamma$ είναι ανεξάρτητα.

(ιι) Για να είναι τα ενδεχόμενα $A, B \cap \Gamma$ ανεξάρτητα θα πρέπει να ισχύει:

$$P(A \cap (B \cap \Gamma)) = P(A)P(B \cap \Gamma)$$

Έχουμε ότι: $P(A \cap (B \cap \Gamma)) = P(A)P(B)P(\Gamma) = P(A)P(B \cap \Gamma)$

Άρα, τα ενδεχόμενα $A, B \cap \Gamma$ είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 2

Αν τα ενδεχόμενα A, B, Γ είναι ανεξάρτητα, να εξετάσετε αν είναι επίσης ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα $A \cup B, \Gamma^c$.

Λύση

Πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει η σχέση:

$$P((A \cup B) \cap \Gamma^c) = P(A \cup B) \cdot P(\Gamma^c)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap \Gamma^c) &= P((A \cup B) - \Gamma) \\ &= P(A \cup B) - P((A \cup B) \cap \Gamma) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(\Gamma) - P(B) \cdot P(\Gamma) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \\ &= (P(A) - P(A) \cdot P(\Gamma)) + (P(B) - P(B) \cdot P(\Gamma)) + (P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) - P(A) \cdot P(B)) \\ &= P(A) \cdot (1 - P(\Gamma)) + P(B) \cdot (1 - P(\Gamma)) - P(A) \cdot P(B) \cdot (1 - P(\Gamma)) \\ &= (1 - P(\Gamma)) \cdot (P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)) \\ &= P(\Gamma^c) \cdot (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= P(\Gamma^c) \cdot P(A \cup B) \end{aligned}$$

Άρα, τα ενδεχόμενα $A \cup B, \Gamma^c$ είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 3

Το δελτίο καιρού για μία τυχαία μέρα του έτους μπορεί να λέει: "ήλιος", "συννεφιά", "βροχή" ή "χιόνι". Υποθέτουμε ότι το έτος έχει 4 εποχές ("φθινόπωρο", "χειμώνας", "άνοιξη", "καλοκαίρι"), με 90 μέρες στην κάθε εποχή. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι χιόνι μπορεί να πέσει μόνο τον χειμώνα, καθώς επίσης και ότι δε βρέχει το καλοκαίρι. Πόσα ετήσια δελτία καιρού είναι δυνατά, (δηλαδή, ποιο είναι το πλήθος όλων των δυνατών ακολουθιών δελτίων καιρού 360 ($= 4 \times 90$) ημερών);

Λύση

Την άνοιξη και το φθινόπωρο, κάθε μέρα έχει 3 πιθανές καταστάσεις για τον καιρό ("ήλιος", "συννεφιά", "βροχή"). Συνεπώς, για κάθε μία από αυτές τις εποχές το συνολικό πλήθος των πιθανών καταστάσεων είναι: $3 \times 3 \times 3 \times \dots \times 3 = 3^{90}$.

Ομοίως, υπάρχουν:

(i) 4^{90} πιθανές καταστάσεις για τον χειμώνα ("ήλιος", "συννεφιά", "βροχή", "χιόνι")

(ii) 2^{90} πιθανές καταστάσεις για το καλοκαίρι ("ήλιος", "συννεφιά")

Άρα, τελικά, το συνολικό πλήθος των δυνατών ακολουθιών δελτίων καιρού για 360 μέρες είναι:

$$3^{90} \times 3^{90} \times 4^{90} \times 2^{90} \approx 10^{167}$$

Άσκηση 4

Πόσους αναγραμματισμούς μπορούμε να κάνουμε στις παρακάτω λέξεις;

(i) *children*

(ii) *bookkeeper*

Λύση

Ο τύπος για τους ανασυνδυασμούς n αντικειμένων, εκ των οποίων υπάρχουν k_1 αντικείμενα τύπου 1, k_2 αντικείμενα τύπου 2, ..., k_m αντικείμενα τύπου m είναι:

$$\frac{n!}{(k_1!) \times (k_2!) \times \dots \times (k_m!)}$$

Με βάση αυτόν τον τύπο, η λύση του προβλήματος έχει ως εξής:

(i) Με την λέξη *children* μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{8!}{(1!) \times (1!) \times \dots \times (1!)} = 8!$$

αναγραμματισμούς, αφού κανένα γράμμα δεν εμφανίζεται παραπάνω από 1 φορά.

(ii) Με την λέξη *bookkeeper* μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{10!}{(1!) \times (2!) \times (2!) \times (3!) \times (1!) \times (1!)} = \frac{10!}{(3!) \times (2!) \times (2!)}$$

αναγραμματισμούς, αφού τα γράμματα "k", "o" εμφανίζονται 2 φορές, το γράμμα "e" εμφανίζεται 3 φορές, και τα υπόλοιπα γράμματα από 1 φορά.

Άσκηση 5

Ένα άτομο έχει 8 φίλους, 5 από τους οποίους θέλει να καλέσει σε ένα πάρτι. Πόσες επιλογές έχει, αν:

(i) 2 από τους φίλους του έχουν μαλώσει, και δεν γίνεται να προσκληθούν συγχρόνως;

(ii) 2 από τους φίλους του είναι ζευγάρι, και πρέπει να προσκληθούν συγχρόνως;

Λύση

(i) Εδώ έχουμε δύο περιπτώσεις, αν 2 άτομα δε γίνεται να προσκληθούν συγχρόνως: είτε δε θα προσκληθεί κανένας από τους 2, είτε θα προσκληθεί μόνο 1 εκ των 2.

Στη συνέχεια, το σύνολο των ατόμων χωρίζεται σε 2 υποσύνολα: το ένα περιέχει τα 2 άτομα που έχουν μαλώσει, και το άλλο τα εναπομείναντα 6 από τα συνολικά 8 άτομα.

Στην πρώτη περίπτωση, το άτομο δεν θα καλέσει κανέναν από τους 2, διαλέγοντας 0 άτομα από το υποσύνολο των 2, και θα καλέσει και τα 5 άτομα από το υποσύνολο των 6.

Στη δεύτερη περίπτωση, το άτομο θα καλέσει 1 εκ των 2, διαλέγοντας 1 άτομο από το υποσύνολο των 2, και θα καλέσει τα υπόλοιπα 4 άτομα από το υποσύνολο των 6.

Οπότε, τελικά το συνολικό πλήθος των επιλογών του ατόμου που θέλει να κάνει το πάρτι είναι:

$$C(2, 0) \times C(6, 5) + C(2, 1) \times C(6, 4) = \binom{2}{0} \times \binom{6}{5} + \binom{2}{1} \times \binom{6}{4} = \binom{6}{5} + 2 \times \binom{6}{4}$$

- (ii) Εδώ έχουμε δύο περιπτώσεις, αν 2 άτομα είναι ζευγάρι και πρέπει να προσκληθούν συγχρόνως: είτε δε θα προσκληθεί κανένας από τους 2, είτε θα προσκληθούν και οι 2.

Στη συνέχεια, το σύνολο των ατόμων χωρίζεται σε 2 υποσύνολα: το ένα περιέχει τα 2 άτομα που είναι ζευγάρι, και το άλλο τα εναπομείναντα 6 από τα συνολικά 8 άτομα.

Στην πρώτη περίπτωση, το άτομο δεν θα καλέσει κανέναν από τους 2, διαλέγοντας 0 άτομα από το υποσύνολο των 2, και θα καλέσει και τα 5 άτομα από το υποσύνολο των 6.

Στη δεύτερη περίπτωση, το άτομο θα καλέσει και τους 2, διαλέγοντας και τα 2 άτομα από το υποσύνολο των 2, και θα καλέσει τα υπόλοιπα 3 άτομα από το υποσύνολο των 6.

Οπότε, τελικά το συνολικό πλήθος των επιλογών του ατόμου που θέλει να κάνει το πάρτι είναι:

$$C(2, 0) \times C(6, 5) + C(2, 2) \times C(6, 3) = \binom{2}{0} \times \binom{6}{5} + \binom{2}{2} \times \binom{6}{3} = \binom{6}{5} + 2 \times \binom{6}{3}$$

Άσκηση 6

Πόσες δυνατές εκδοχές υπάρχουν στο καθένα από τα παρακάτω πειράματα;

- (α) Εγκαθιστούμε ένα πρόγραμμα διαδοχικά σε 10 υπολογιστές.
- (β) Επιλέγουμε με τη σειρά 3 από 12 αντικείμενα, χωρίς επανατοποθέτηση.
- (γ) Στριβουμε ένα κέρμα 6 φορές.
- (δ) Επιλέγουμε 20 άτομα από 100 για μία δημοσκόπηση.
- (ε) Ρίχνουμε ένα ζάρι 7 φορές.
- (στ) Βάζουμε 13 ανθρώπους να κάτσουν σε μία σειρά.
- (ζ) Μοιράζουμε με τη σειρά 8 φύλλα από μία συνηθισμένη τράπουλα 52 φύλλων.
- (η) Ρίχνουμε ένα κέρμα 4 φορές και ένα ζάρι 2 φορές.

Λύση

Σε κάθε περίπτωση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον σωστό κανόνα αρίθμησης. Πιο συγκεκριμένα:

- (α) Έχουμε 10 επιλογές για τον πρώτουπολογιστή, 9 για τον δεύτερο, κ.ο.κ. Το πλήθος των μεταθέσεων είναι: $10! = 3628800$.

- (β) Το πλήθος των διατεταγμένων διατεταγμένων ζάδων είναι:

$$\frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!} = 1320.$$

- (γ) Κάθε μία από τις 6 ρίψεις μπορεί να καταλήξει σε 2 αποτελέσματα, άρα το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων είναι: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 32$.

- (δ) Εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, το πλήθος των συνδυασμών είναι:

$$\binom{100}{20} = \frac{100!}{20!(100-20)!} \simeq 5.359 \times 10^{20}.$$

- (ε) Κάθε ζαριά έχει 6 δυνατά αποτελέσματα. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^7$ δυνατές επαναληπτικές διατάξεις.

(στ) Έχουμε 13 επιλογές για τον πρώτο που θα επιλέξουμε, 12 επιλογές για τον δεύτερο, κ.ο.κ. Συνεπώς, έχουμε συνολικά $13 \times 12 \times 11 \times \dots \times 1 = 13! = 6,227,020,800$ μεταθέσεις.

(ζ) Παρατηρήστε ότι τα φύλλα μοιράζονται με την σειρά, συνεπώς ψάχνουμε για διατεταγμένες δάδες. Έχουμε 52 επιλογές για το πρώτο χαρτί, 51 επιλογές για το δεύτερο χαρτί, κ.ο.κ. Συνεπώς, έχουμε $\frac{52!}{(52-8)!} = 30,342,338,208,000$ διαφορετικές δάδες.

(η) Κάθε κέρμα έχει 2 δυνατά αποτελέσματα και κάθε ζάρι 6 δυνατά αποτελέσματα. Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 = 576$ δυνατές εκδοχές.

Άσκηση 7

Οι φοιτητές του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών αγαπούν το μάθημα των Πιθανοτήτων (HY217), και επιθυμούν να αυξηθεί η διδακτέα ύλη του. Ωστόσο, κάποιοι καθηγητές του τμήματος αντιδρούν, υποστηρίζοντας ότι σε ένα τέτοιο ενδεχόμενο, οι φοιτητές θα αφιερώνουν περισσότερο χρόνο στο HY217, αμελώντας ταυτόχρονα τα υπόλοιπα μαθήματά τους. Ως εκ τούτου, φοιτητές και καθηγητές συμφωνούν να συσταθεί επιτροπή που θα εξετάσει το αίτημα των φοιτητών. Για το σκοπό αυτό θα λάβουν χώρα εκλογές όπου θα είναι υποψήφιοι 3 φοιτητές και 7 καθηγητές του τμήματος. Εκλέγονται τυχαία 3 άτομα για την επιτροπή.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα να εκλεγούν στην επιτροπή τουλάχιστον ένας φοιτητής και τουλάχιστον ένας καθηγητής;

(β) Ας υποθέσουμε τώρα πως, ανάλογα με τη σειρά εκλογής, αυτοί που εκλέγονται παίρνουν διαφορετικούς ρόλους στην επιτροπή (ο πρώτος γίνεται πρόεδρος, ο δεύτερος αντιπρόεδρος και ο τρίτος γραμματέας). Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A να εκλεγεί φοιτητής πρόεδρος και καθηγητής αντιπρόεδρος και γραμματέας;

Λύση

(α) Έστω X το πλήθος των φοιτητών που επιλέχθηκαν, και Y το πλήθος των καθηγητών. Εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη των τριών ατόμων, υπολογίζουμε την ζητούμενη πιθανότητα ως εξής:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1, Y \geq 1) &= P(\{X = 1, Y = 2\} \cup \{X = 2, Y = 1\}) \\ &= P(\{X = 1, Y = 2\}) + P(\{X = 2, Y = 1\}) \\ &= \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{40} + \frac{7}{40} = \frac{28}{40} = 0.7. \end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους.

(β) Εφόσον εδώ μας απασχολεί η σειρά με την οποία επιλέγονται τα "αντικείμενα" (δηλαδή, τα μέλη της επιτροπής), υπολογίζουμε αυτήν την πιθανότητα βάσει του νέου δειγματικού χώρου Ω ο οποίος περιέχει όλες τις διατεταγμένες 3άδες, δηλαδή περιέχει:

$$|\Omega| = \frac{10!}{(10-3)!} = 720 \text{ στοιχεία.}$$

Το πλήθος των 3άδων που ανήκουν στο A είναι $3 \times 7 \times 6$, αφού έχουμε 3 επιλογές για τον φοιτητή που θα γίνει πρόεδρος, 7 επιλογές για τον καθηγητή που θα γίνει αντιπρόεδρος, και 6 επιλογές για τον καθηγητή που θα γίνει ταμίας (ανάμεσα στους 6 που μένουν).

Άρα, η πιθανότητα του ενδεχομένου που μας ενδιαφέρει ισούται με:

$$P(A) = \frac{3 \times 7 \times 6}{720} = \frac{7}{40} \simeq 0.175.$$