

Άσκηση 1

Τρεις εργάτες, οι A,B,Γ εργάζονται σε μια βιοτεχνία. Από ένα συγκεκριμένο είδος συσκευών ο A κατασκευάζει το 50%, ο B το 30%, ο Γ το 20%. Από αυτές τις συσκευές που κατασκευάζει ο A, το 2% βγαίνουν ελαττωματικές. Τα αντίστοιχα ποσοστά για τους B και Γ είναι 3% και 5%. Αγοράζουμε μια συσκευή και είναι ελαττωματική. Βρείτε την πιθανότητα να την έχει κατασκευάσει ο A.

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$\begin{aligned}A &= \{\text{μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον A}\} \\B &= \{\text{μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον B}\} \\ \Gamma &= \{\text{μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον Γ}\} \\E &= \{\text{μια συσκευή είναι ελαττωματική}\}\end{aligned}$$

Άρα ξέρουμε ότι

$$P(A) = 0.5, P(B) = 0.3, P(\Gamma) = 0.2, P(E | A) = 0.02, P(E | B) = 0.03 \text{ και } P(E | \Gamma) = 0.05$$

Ψάχνω την πιθανότητα $P(A | E)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Bayes έχουμε:

$$\begin{aligned}P(A | E) &= \frac{P(E | A) \cdot P(A)}{P(E | A) \cdot P(A) + P(E | B) \cdot P(B) + P(E | \Gamma) \cdot P(\Gamma)} \\&= \frac{0.02 \cdot 0.5}{0.02 \cdot 0.5 + 0.03 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.2} \approx 0.34\end{aligned}$$

Άσκηση 2

Ένα κουτί περιέχει 3 κάρτες: μια μπλε και από τις δύο πλευρές, μια κίτρινη και από τις δύο πλευρές και μια που είναι από τη μια πλευρά μπλε και από την άλλη πλευρά κίτρινη. Επιλέγουμε τυχαία μια κάρτα και βλέπουμε ότι η μια της πλευρά είναι κίτρινη. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και η άλλη πλευρά κίτρινη;

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$\begin{aligned}M &= \{\text{επιλέγουμε την κάρτα που είναι μπλε και από τις δυο πλευρές}\} \\K &= \{\text{επιλέγουμε την κάρτα που είναι κίτρινη και από τις δυο πλευρές}\} \\H &= \{\text{επιλέγουμε την κάρτα που είναι από τη μια πλευρά μπλε και από την άλλη πλευρά κίτρινη}\} \\A &= \{\text{η επιλεγμένη πλευρά είναι κίτρινη}\}\end{aligned}$$

Ψάχνω την πιθανότητα $P(K | A)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Bayes έχουμε:

$$\begin{aligned}P(K | A) &= \frac{P(A | K) \cdot P(K)}{P(A | M) \cdot P(M) + P(A | K) \cdot P(K) + P(A | H) \cdot P(H)} \\&= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \\&= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Άσκηση 3

Ο Αλέξανδρος γνωρίζει τρεις κοπέλες, τη Μαρία, την Ελένη και τη Γεωργία. Επιλέγει μία από αυτές στην τύχη, της κάνει ερωτική εξομολόγηση αλλά εκείνη τον απορρίπτει. Εάν γνωρίζουμε ότι οι πιθανότητες να ανταποκριθούν οι κοπέλες θετικά είναι 90% για τη Μαρία, 50% για τη Γεωργία και 5% για την Ελένη, ποια η πιθανότητα ο Αλέξανδρος να επέλεξε τη Μαρία;

Λύση

Έστω M , E και Γ τα ενδεχόμενα ο Αλέξανδρος να επέλεξε αντίστοιχα τη Μαρία, την Ελένη και τη Γεωργία. Έστω ακόμα το ενδεχόμενο X ο Αλέξανδρος να απορριφθεί.

Εφόσον ο Αλέξανδρος διαλέγει μια από τις κοπέλες στην τύχη εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $P(M)=P(E)=P(\Gamma)=1/3$

Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ακόμα ότι: $P(X|M)=0.1$, $P(X|\Gamma)=0.5$, $P(X|E)=0.95$.

Επομένως, παρατηρώντας ότι τα M, E και Γ αποτελούν διαμέριση και χρησιμοποιώντας τον κανόνα του *Bayes* έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(M|X) &= \frac{P(M)P(X|M)}{P(M)P(X|M) + P(\Gamma)P(X|\Gamma) + P(E)P(X|E)} \\ &= \frac{0.1 \times 1/3}{0.1 \times 1/3 + 0.5 \times 1/3 + 0.95 \times 1/3} \\ &= 0.0645 \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Η Σοφία περνά μπροστά από ένα κουτί που περιέχει δύο ειδών σοκολάτες: ION γάλακτος και ION αμυγδάλου. Στο κουτί υπάρχουν τρεις φορές περισσότερες ION γάλακτος από ION αμυγδάλου. Η Σοφία επιλέγει μία σοκολάτα στην τύχη. Αν επιλέξει μία ION γάλακτος, την τρώει με πιθανότητα $1/5$. Αν επιλέξει μία ION αμυγδάλου, την τρώει με πιθανότητα $2/5$. Με ποια πιθανότητα η Σοφία τρώει την σοκολάτα που επέλεξε;

Λύση

Ορίζουμε τα γεγονότα:

$B = \{\text{Η Σοφία τρώει τη σοκολάτα}\}$

$A = \{\text{Η σοκολάτα είναι ION γάλακτος}\}$

$A^c = \{\text{Η σοκολάτα είναι ION αμυγδάλου}\}$

Από την εκφώνηση έχουμε ότι $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(A^c) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{5}$, $P(B|A^c) = \frac{2}{5}$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4} = 0.25$$

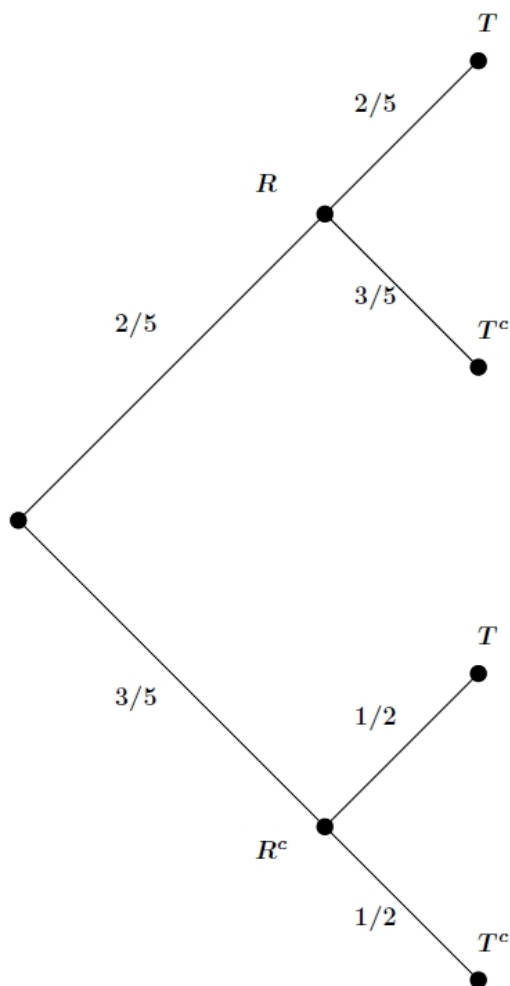
Άσκηση 5

Η πιθανότητα ο Γρηγόρης να πάει για πρωινό τρέξιμο πριν την δουλειά είναι $2/5$. Αν πάει για τρέξιμο, η πιθανότητα να προλάβει το τρένο για τη δουλειά είναι $2/5$. Αν δεν πάει για τρέξιμο, η πιθανότητα να προλάβει το τρένο είναι $1/2$. Αν δεν προλάβει το τρένο τότε παίρνει το λεωφορείο. Αυτό γίνεται από Δευτέρα έως Παρασκευή.

- (α) Σχεδιάστε ένα δέντρο ώστε να δείξετε τις πιθανότητες που περιγράφουν το πρωινό του Γρηγόρη.
 (β) Ποιά είναι η πιθανότητα να προλάβει ο Γρηγόρης το τρένο ένα τυχαίο πρωί ;
 (γ) Γνωρίζετε ότι ο Γρηγόρης πρόλαβε το τρένο. Ποιά η πιθανότητα να πήγε για τρέξιμο ;

Λύση

(α) Έστω R το γεγονός ότι ο Γρηγόρης πάει για τρέξιμο, και T το γεγονός ότι προλαβαίνει το τρένο. Το δέντρο φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Δέντρο πιθανοτήτων για το πρωινό του Γρηγόρη

- (β) Χρησιμοποιώντας το νόμο της ολικής πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(T|R)P(R) + P(T|R^c)P(R^c) \\
 &= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \\
 &= 0.46
 \end{aligned}$$

(γ) Χρησιμοποιούμε το νόμο του *Bayes* και έχουμε:

$$\begin{aligned} P(R|T) &= \frac{P(T|R)P(R)}{P(T)} \\ &= 0.3478 \end{aligned}$$

Άσκηση 6

Μία ασφαλιστική εταιρία κατατάσσει τους ανθρώπους σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με την επικινδυνότητά τους στην οδήγηση: Κατηγορία μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου. Τα αρχεία της εταιρίας δείχνουν ότι οι πιθανότητες πελάτες μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου να έχουν ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι 0.05, 0.15 και 0.30 αντίστοιχα. Αν το 20% του πληθυσμού αποτελείται από άτομα μικρού ρίσκου, το 50% αποτελείται από άτομα μέτριου ρίσκου και το υπόλοιπο 30% αποτελείται από άτομα μεγάλου ρίσκου, ποιο ποσοστό του πληθυσμού έχει ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους; Αν επιλεγμένος ασφαλισμένος δεν είχε κανένα ατύχημα το 2012, ποια η πιθανότητα ότι είναι άτομο

(α) μικρού ρίσκου;

(β) μεγάλου ρίσκου;

Λύση

Έστω G το γεγονός κάποιος να είναι καλός οδηγός, M να είναι μέτριος οδηγός και B κακός. Αν A το γεγονός κάποιος να είχε ατύχημα, τότε

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|G)P(G) + P(A|M)P(M) + P(A|B)P(B) \\ &= (0.05) \times (0.2) + (0.15) \times (0.5) + (0.3) \times (0.3) = 0.175 \end{aligned}$$

(α)

$$P(G|A^c) = \frac{P(A^c|G)P(G)}{P(A^c)} = \frac{0.95 \times 0.2}{0.825} = 0.23.$$

(β)

$$P(M|A^c) = \frac{P(A^c|M)P(M)}{P(A^c)} = \frac{0.85 \times 0.5}{0.825} = 0.51.$$