ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 1

Άσκηση 1

Ρίχνουμε δύο φορές ένα δίκαιο εξάεδρο ζάρι.

α) Περιγράψτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

β) Ονομάζουμε A το γεγονός ότι η πρώτη ρίψη φέρνει αριθμό μικρότερο από 3. Περιγράψτε το γεγονός A και υπολογίστε την πιθανότητά του, $P(A)$.

γ) Ονομάζουμε B το γεγονός ότι το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι ίσο με 4. Περιγράψτε το γεγονός B και υπολογίστε την πιθανότητά του, $P(B)$.

δ) Ποιο είναι το ενδεχόμενο $A \cap B$;

Λύση

α) Μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε απλό ενδεχόμενο χρησιμοποιώντας ένα διατεταγμένο ζεύγος (a, b) όπου a και b είναι οι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν τα αποτελέσματα της 1ης και της 2ης ρίψης αντίστοιχα. Έτσι ο δειγματικός χώρος του πειράματος εκφράζεται ως εξής:

$$\Omega = \big\{(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,(6,6)\big\}$$

ή πιο απλά και αναλυτικά:

$$\Omega = \big\{(a,b) : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6\big\}$$

β) Αντίστοιχα το γεγονός $A = \big\{$ Η 1η ρίψη φέρνει αριθμό μικρότερο από $3\big\}$ περιγράφεται ως εξής:

$$A = \big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\big\}$$

ή

$$A = \big\{(a,b) : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 6\big\}$$

Αφού τα ζάρια είναι δίκαια, όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, άρα:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

γ) Το γεγονός $B = \big\{$ Το άθροισμα των 2 ρίψεων είναι ίσο με $4\big\}$ περιγράφεται ως εξής:

$$B = \big\{(1,3),(2,2),(3,1)\big\}$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

δ) Προσδιορίζοντας να κοινά στοιχεία των συνόλων A και B, έχουμε: $A \cap B = \{(1,3),(2,2)\}$.

Άσκηση 2
Σε μια έρευνα συγκεντρώθηκαν στοιχεία για 1000 άτομα. Βρέθηκε ότι από αυτά:

α) 832 ήταν άνδρες

β) 521 ήταν παντρεμένοι

γ) 350 ήταν παντρεμένοι άνδρες

Είναι δυνατόν αυτά τα στοιχεία να είναι σωστά;

Λύση
Αν $A = \{\text{άνδρας}\}$ και $\Pi = \{\text{παντρεμένος}\}$, τότε σύμφωνα με τα παραπάνω στοιχεία έχουμε:

$$P(A) = \frac{832}{1000}, P(\Pi) = \frac{521}{1000} \text{ και } P(A \cap \Pi) = \frac{350}{1000}.$$

Εφαρμόζοντας βασικές ιδιότητες πιθανοτήτων, έχουμε:

$$P(A \cup \Pi) = P(A) + P(\Pi) - P(A \cap \Pi) = \frac{832}{1000} + \frac{521}{1000} - \frac{350}{1000} = \frac{1003}{1000} = 1.003 > 1$$

, το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως, δεν είναι δυνατόν τα παραπάνω στοιχεία να είναι σωστά.

Άσκηση 3
Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 2 \cdot x$ και $P(A \cup B) = 4 \cdot x^2 + \frac{3}{4}$, να βρεθεί ο $x > 0$.

Λύση
Ξέρουμε ότι:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τα δεδομένα της άσκησης, έχουμε:

$$4 \cdot x^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{2} + 2 \cdot x$$

$$16 \cdot x^2 + 3 \leq 2 + 8 \cdot x$$

$$16 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1 \leq 0$$

$\Delta = 64 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 64 - 64 = 0$, άρα $x_{1,2} = \frac{8}{2 \cdot 16} = \frac{1}{4}$ και $16 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1 \geq 0$.
Άρα αναγκαστικά $16 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1 = 0$ και $x = \frac{1}{4}$.
(Μάλιστα, παρατηρούμε ότι τα A και B είναι ασυμβίβαστα, αφού $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.)

Άσκηση 4
Ένα κουτί περιέχει 10 άσπρους και 5 μαύρους βόλους. Επιλέγουμε τυχαία δύο βόλους χωρίς επανάθεση.

α) Ποια είναι η πιθανότητα και οι δύο βόλοι να είναι άσπροι;

β) Ποια είναι η πιθανότητα ο πρώτος βόλος να είναι άσπρος και ο δεύτερος μαύρος;

Λύση
Το κουτί περιέχει 10 άσπρους και 5 μαύρους βόλους (συνολικά 15 βόλους).

α) Έστω A_1 το ενδεχόμενο ο πρώτος βόλος να είναι άσπρος και A_2 το ενδεχόμενο ο δεύτερος βόλος να είναι άσπρος. Τότε, θα ισχύει ότι:

$$P(A_1) = \frac{10}{15}$$

Δεδομένου ότι ο πρώτος βόλος είναι άσπρος, πλέον θα υπάρχουν 14 βόλοι στο κουτί, από τους οποίους οι 9 θα είναι άσπροι. Επομένως, η πιθανότητα ο δεύτερος βόλος που επιλέγεται τυχαία να είναι άσπρος, δεδομένου ότι ο πρώτος βόλος είναι άσπρος, είναι η ακόλουθη:

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{9}{14}$$

Χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό νόμο, η πιθανότητα ότι και οι δύο βόλοι που επιλέγονται τυχαία είναι άσπροι θα είναι ίση με:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{90}{210} = \frac{9}{21}$$

β) Έστω M_2 το ενδεχόμενο ο δεύτερος βόλος να είναι μαύρος. Τότε, όπως είδαμε παραπάνω, θα ισχύει ότι:

$$P(A_1) = \frac{10}{15}$$

Δεδομένου ότι ο πρώτος βόλος είναι άσπρος, πλέον θα υπάρχουν 14 βόλοι στο κουτί, από τους οποίους οι 5 θα είναι μαύροι. Επομένως, η πιθανότητα ο δεύτερος βόλος που επιλέγεται τυχαία να είναι μαύρος, δεδομένου ότι ο πρώτος βόλος είναι άσπρος, είναι η ακόλουθη:

$$P(M_2 \mid A_1) = \frac{5}{14}$$

Χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό νόμο, η πιθανότητα ότι ο πρώτος βόλος είναι άσπρος και ο δεύτερος μαύρος θα είναι ίση με:

$$P(A_1 \cap M_2) = P(A_1) \cdot P(M_2 \mid A_1) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{50}{210} = \frac{5}{21}$$

Άσκηση 5

Ρίχνουμε 2 ζάρια. Βρείτε την πιθανότητα τουλάχιστον ένα να έφερε 6, αν είναι γνωστό ότι τα ζάρια έφεραν διαφορετικούς αριθμούς.

Λύση

Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος και ορίσουμε τα ενδεχόμενα:

$$A = \{\text{τουλάχιστον ένα ζάρι έφερε 6}\} \text{ και } B = \{\text{τα ζάρια έφεραν διαφορετικούς αριθμούς}\},$$

τότε ψάχνουμε την εξής πιθανότητα:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3},$$

αφού:

$$A \cap B = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$$

και:

$$B = \Omega \setminus \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}.$$

Άσκηση 6
Από τους ασθενείς που νοσηλεύονται σε μια κλινική, το 60% έχει καρδιακή ανεπάρκεια, το 50% έχει πνευμονική ανεπάρκεια και το 35% έχει και τα δύο. Βρείτε τις πιθανότητες:

α) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.

β) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν δεν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.

γ) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν είναι γνωστό ότι δεν έχει και τα δύο προβλήματα.

Λύση
Έστω τα ενδεχόμενα:

$$K = \{\text{ένας ασθενής έχει καρδιακή ανεπάρκεια}\}$$
$$\Pi = \{\text{ένας ασθενής έχει πνευμονική ανεπάρκεια}\}$$

Τότε, με βάση τα δεδομένα της άσκησης, γνωρίζουμε ότι:

$$P(K) = \frac{60}{100} = 0.6 \ , P(\Pi) = \frac{50}{100} = 0.5 \text{ και } P(K \cap \Pi) = \frac{35}{100} = 0.35$$

α) Ψάχνομε την πιθανότητα $P(K \mid \Pi)$. Άρα, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$P(K \mid \Pi) = \frac{P(K \cap \Pi)}{P(\Pi)} = \frac{0.35}{0.5} = 0.7$$

β) Ψάχνουμε την πιθανότητα:

$$P(K \mid \Pi^c) = \frac{P(K \cap \Pi^c)}{P(\Pi^c)}$$

Ξέρουμε ότι για δυο ενδεχόμενα K, Π ισχύει ότι: $K \cap \Pi^c = K - \Pi$ και $P(K - \Pi) = P(K) - P(K \cap \Pi)$. Άρα, έχουμε:

$$P(K \mid \Pi^c) = \frac{P(K) - P(K \cap \Pi)}{1 - P(\Pi)} = \frac{0.6 - 0.35}{1 - 0.5} = 0.5$$

γ) Ψάχνουμε την πιθανότητα:

$$P(K \mid (K \cap \Pi)^c) = \frac{P(K \cap (K \cap \Pi)^c)}{P((K \cap \Pi)^c)} = \frac{P(K) - P(K \cap \Pi)}{1 - P(K \cap \Pi)} = \frac{0.6 - 0.35}{1 - 0.35} \approx 0.38$$

Άσκηση 7
Έχουμε τρία ακατάστατα δωμάτια $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Ένα αντικείμενο βρίσκεται σε ένα από αυτά. Για κάθε $i = 1, 2, 3$, p_i είναι η πιθανότητα το αντικείμενο να είναι στο Δ_i και q_i είναι η πιθανότητα, αν το αντικείμενο βρίσκεται στο Δ_i και ψάξουμε εκεί, να το βρούμε. Ψάχνουμε και στα τρία δωμάτια. Ποια είναι η πιθανότητα να βρούμε το αντικείμενο;

Λύση
Έστω τα ενδεχόμενα:

$$\Delta_i = \{\text{το αντικείμενο βρίσκεται στο } \Delta_i \text{ δωμάτιο}\}$$
$$E = \{\text{το αντικείμενο βρέθηκε}\}$$

για $i = 1, 2, 3$. Άρα, με βάση τα δεδομένα της άσκησης, ξέρουμε ότι:

$$P(\Delta_i) = p_i \text{ και } P(E \mid \Delta_i) = q_i \text{ για } i = 1, 2, 3.$$

Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(E)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap \Delta_1) + P(E \cap \Delta_2) + P(E \cap \Delta_3) \\ &= P(\Delta_1) \cdot P(E \mid \Delta_1) + P(\Delta_2) \cdot P(E \mid \Delta_2) + P(\Delta_3) \cdot P(E \mid \Delta_3) \\ &= p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3 \end{aligned}$$

Άσκηση 8
Σε μια περιοχή υπάρχουν τρεις πόλεις, οι Α, Β και Γ. Από την πόλη Α, το 40% των κατοίκων είναι χορτοφάγοι, στην πόλη Β το ποσοστό φτάνει το 20%, και στην Γ είναι 30%. Γνωρίζουμε ακόμα ότι οι κάτοικοι της πόλης Α αποτελούν το 20% του συνολικού πληθυσμού των παραπάνω πόλεων ενώ οι κάτοικοι της πόλης Γ το 50%. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτός να είναι χορτοφάγος.

Λύση
Έστω τα ενδεχόμενα:

$$\begin{aligned} X &= \{\text{Ο πολίτης είναι χορτοφάγος}\} \\ A &= \{\text{Ο πολίτης είναι κάτοικος της πόλης Α}\} \\ B &= \{\text{Ο πολίτης είναι κάτοικος της πόλης Β}\} \\ \Gamma &= \{\text{Ο πολίτης είναι κάτοικος της πόλης Γ}\} \end{aligned}$$

Από την εκφώνηση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

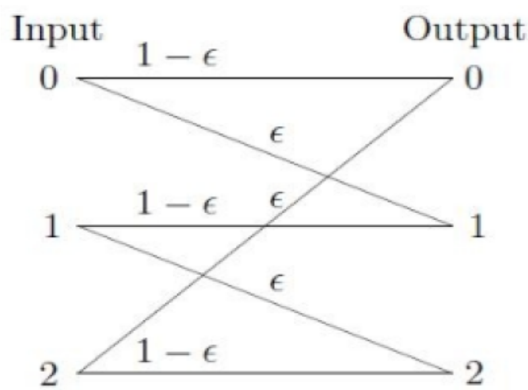
α) $P(A) = 0.2$, $P(\Gamma) = 0.5$, $P(B) = 1 - P(A) - P(\Gamma) = 0.3$

β) $P(X|A) = 0.4$, $P(X|B) = 0.2$, $P(X|\Gamma) = 0.3$

Άρα, από το θεώρημα ολικής πιθανότητας, έχουμε ότι:

$$P(X) = P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B) + P(X|\Gamma)P(\Gamma) = 0.29$$

Άσκηση 9
Το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης για ένα τριαδικό κανάλι φαίνεται στο Σχήμα 1:



Σχήμα 1: Διάγραμμα Πιθανοτήτων Μετάβασης

Υποθέστε ότι τα σύμβολα 0,1 και 2 στέλνονται με πιθανότητες 1/2,1/4 και 1/4 αντίστοιχα. Να βρεθουν οι πιθανότητες λήψης συμβόλων. Τί παρατηρείτε;

Λύση
Έστω A_i το γεγονός ότι εστάλη το σύμβολο i και B_i το γεγονός ότι ελήφθη το σύμβολο i. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας και τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B_0) &= P(B_0|A_0)P(A_0) + P(B_0|A_2)P(A_2) \\ &= \frac{1}{2}(1-\epsilon) + \frac{1}{4}\epsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(B_1|A_0)P(A_0) + P(B_1|A_1)P(A_1) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{4}(1-\epsilon) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2|A_1)P(A_1) + P(B_2|A_2)P(A_2) \\ &= \frac{1}{4}\epsilon + \frac{1}{4}(1-\epsilon) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο το άθροισμα των πιθανοτήτων των γεγονότων B_i ισούται με 1.