

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Πιθανότητες

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τελικής Εξέτασης - 11 Ιανουαρίου 2019

Θέμα 1.

(α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(|X| \geq 0.4) &= 1 - P(|X| < 0.4) = 1 - P(-0.4 < X < 0.4) = 1 - [F_X(0.4) - F_X(-0.4)] = \\ &= 1 - F_X(0.4) + F_X(-0.4) = 1 - \frac{0.4 + 1}{3} + \frac{-0.4 + 1}{3} = 0.733 \end{aligned}$$

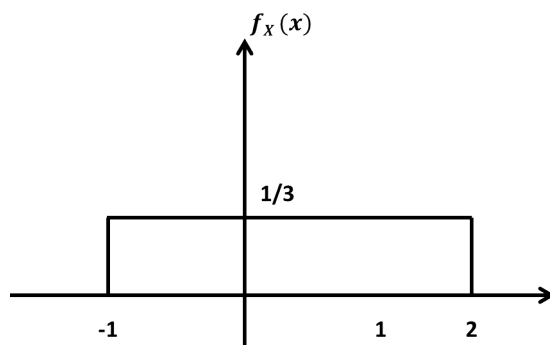
Επίσης,

$$P(X = 2) = 0,$$

καθώς η τ.μ. X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή.

(β) Παραγωγίζοντας έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} 1/3, & -1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

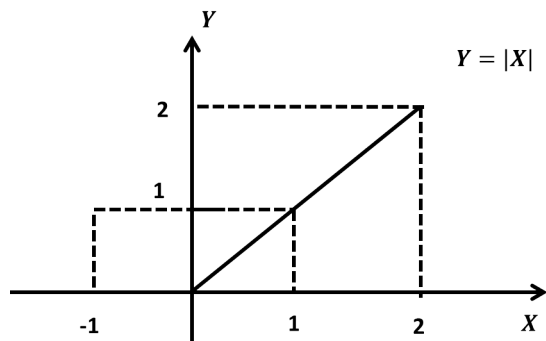


Σχήμα 1: Γραφική παράσταση ερωτήματος 1(β)

Η τ.μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή : $X \sim [-1, 2]$

(γ) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το πεδίο τιμών της τ.μ Y είναι το $[0, 2]$.

Έχουμε ότι:

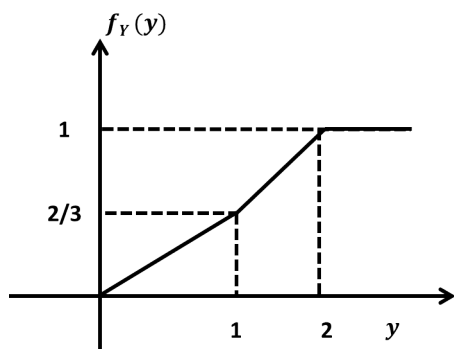


Σχήμα 2: Γραφική παράσταση ερωτήματος 1(γ)

- Για $1 \leq y < 2$, $F_Y(y) = \frac{y+1}{3}$
- Για $0 \leq y < 1$, $F_Y(y) = \frac{y+1}{3} - \frac{-y+1}{3} = \frac{2y}{3}$
- $y < 0$, $F_Y(y) = 0$, και για $y \geq 2$, $F_Y(y) = 1$

Συνεπώς,

$$f_{X/S^c}(x) = \begin{cases} 1, & y \geq 2, \\ \frac{y+1}{3}, & 1 \leq y < 2 \\ \frac{2y}{3}, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$



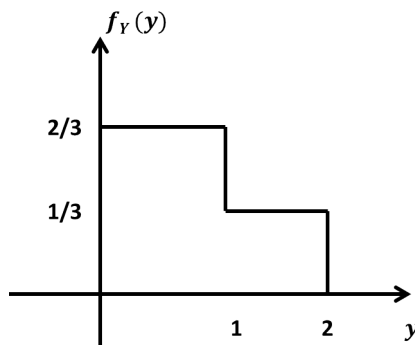
Σχήμα 3: Γραφική παράσταση ερωτήματος 1(γ)

(δ)

Έχουμε ότι:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} 2/3, & 0 \leq y < 1, \\ 1/3, & 1 \leq y < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2)$$

Κατά διαστήματα ομοιόμορφη κατανομή



Σχήμα 4: Γραφική παράσταση ερωτήματος 1(δ)

Θέμα 2.

(α) Ορίζουμε το γεγονός $S = \{\text{Μεταδίδεται σήμα}\}$ με $P(S) = 0.75$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, έχουμε ότι:

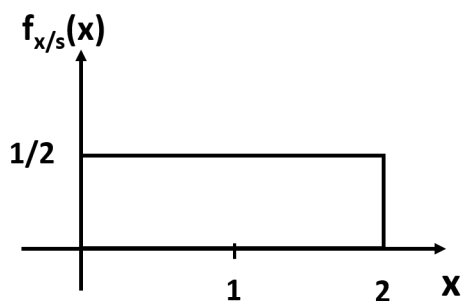
$$f_X(x) = P(S) \cdot f_{X/S}(x) + P(S^c) \cdot f_{X/S^c}(x),$$

όπου από την εκφώνηση έχουμε ότι:

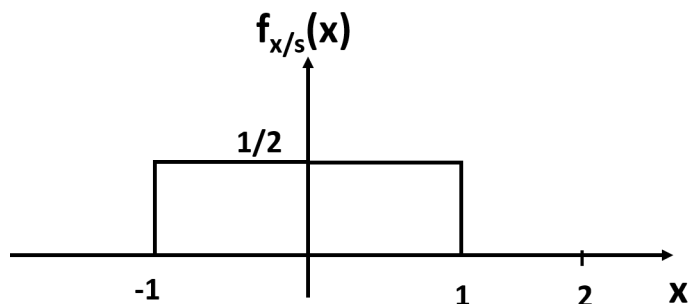
$$X/S \sim U[0, 2] \text{ και } X/S^c \sim U[-1, 1]$$

$$f_{X/S}(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$f_{X/S^c}(x) = \begin{cases} 1/2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



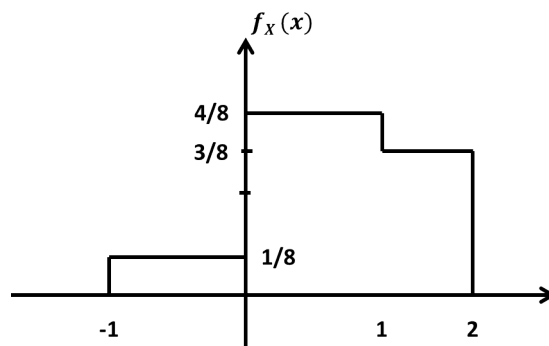
Σχήμα 5: Το δενδρικό διάγραμμα του Θέματος 3.



Σχήμα 6: Το δενδρικό διάγραμμα του Θέματος 3.

Συνεπώς,

$$f_X(x) = \frac{3}{4} \cdot f_{X/S}(x) + \frac{1}{4} \cdot f_{X/S^c}(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} & -1 \leq x < 0, \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1, \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0 & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Σχήμα 7: Το δενδρικό διάγραμμα του Θέματος 3.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/8, & -1 \leq x < 0, \\ 4/8, & 0 \leq x < 1, \\ 3/8, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(β) Από το Θεώρημα Ολικής Μέσης Τιμής (ΘΟΜΤ), έχουμε ότι:

$$E[X] = P(S) \cdot E[X/S] + P(S^c) \cdot E[X/S^c]$$

και

$$E[X^2] = P(S) \cdot E[X^2/S] + P(S^c) \cdot E[X^2/S^c]$$

Όμως, έχουμε:

$$E[X/S] = \frac{0+2}{2} = 1,$$

$$E[X/S^c] = \frac{-1+1}{2} = 0,$$

και

$$E[X^2/S] = \frac{0^2 + 0 \cdot 2 + 2^2}{3} = \frac{4}{3},$$

$$E[X^2/S^c] = \frac{(-1)^2 - 1 \cdot 1 + 1^2}{3} = \frac{1}{3}$$

Επομένως,

$$E[X] = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$E[X^2] = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{12} = 1.0833$$

Επομένως,

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 1.0833 - 0.75^2 = 0.5208$$

(γ) Από το νόμο του Bayes έχουμε:

$$P(S/X = 0.5) = \frac{P(S) \cdot f_{X/S}(0.5)}{f_X(0.5)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{4}{8}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Θέμα 3.

Έστω:

$$L_{OK} = \{\text{ο κύλινδρος ικανοποιεί τις προδιαγραφές μήκους}\}$$

$$D_{OK} = \{\text{ο κύλινδρος ικανοποιεί τις προδιαγραφές διαμέτρου}\}$$

(α)

$$\begin{aligned} P(L_{OK}^c) &= 1 - P(L_{OK}) = 1 - P(8.45 \leq L \leq 8.65) = 1 - P\left(\frac{8.45 - 8.54}{0.05} \leq \frac{L - 8.54}{0.05} \leq \frac{8.65 - 8.54}{0.05}\right) \\ &= 1 - P(-1.8 \leq \frac{L - 8.54}{0.05} \leq 2.2) = 1 - [\Phi(2.2) - \Phi(-1.8)] \\ &= 1 - \Phi(2.2) + 1 - \Phi(1.8) = 2 - 0.9861 - 0.9641 = 0.0498 = 4.98\% \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} P(D_{OK}^c) &= 1 - P(D_{OK}) = 1 - P(1.55 \leq D \leq 1.60) = 1 - P\left(\frac{1.55 - 1.57}{0.01} \leq \frac{D - 1.57}{0.01} \leq \frac{1.60 - 1.57}{0.01}\right) \\ &= 1 - P(-2 \leq \frac{D - 1.57}{0.01} \leq 3) = 1 - [\Phi(3) - \Phi(-2)] \\ &= 1 - \Phi(3) + 1 - \Phi(2) = 2 - 0.9987 - 0.9772 = 0.0241 = 2.41\% \end{aligned}$$

(γ) Ορίζουμε το γεγονός:

$$C_{OK} = \{\text{ο κύλινδρος μπορεί να χρησιμοποιηθεί}\}$$

Από την εκφώνηση:

$$C_{OK} = L_{OK} \cap D_{OK}$$

$$P(C_{OK}) = P(L_{OK} \cap D_{OK}) = P(L_{OK}) \cdot P(D_{OK}), \quad \text{λόγω ανεξαρτησίας των τ.μ L \& D.}$$

$$P(C_{OK}^c) = 1 - P(C_{OK}) = 1 - P(L_{OK}) \cdot P(D_{OK}) = 1 - (1 - 0.0498)(1 - 0.0241) = 0.0727 = 7.27\%$$

(δ) Έστω X το πλήθος των κυλίνδρων στο δείγμα μεγέθους $n = 5$ που δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Προφανώς:

$$X \sim \Delta(n = 5, p = 0.0727)$$

$$P_X(k) = \binom{5}{k} 0.0727^k \cdot 0.9273^{5-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

$$P(X = 1) = 5 \cdot 0.0727 \cdot 0.9273^4 = 0.2688$$

Θέμα 4.

Από την εκφώνηση ισχύει ότι: $X \sim U[0, 3]$ και $Y \sim U[0, 3]$ και

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

και

$$E[X] = E[Y] = \frac{0+3}{2} = 1.5$$

$$\text{var}(X) = \text{var}(Y) = \frac{(3-0)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0.75$$

α) Η περίμετρος είναι $Z = 2X + 2Y$. Επομένως:

$$E[Z] = 2E[X] + 2E[Y] = 2 \cdot 1.5 + 2 \cdot 1.5 = 6$$

$$\text{var}(Z) = \text{var}(2X+2Y) = \text{var}(2X) + \text{var}(2Y) = 4\text{var}(X) + 4\text{var}(Y) = 4 \cdot 0.75 + 4 \cdot 0.75 = 6, \quad [X, Y \text{ ανεξάρτητες}]$$

β) Το εμβαδόν είναι $W = XY$, οπότε:

$$E[W] = E[XY] = E[X]E[Y] = 1.5 \cdot 1.5 = 2.25$$

και

$$\begin{aligned} \text{var}(W) &= \text{var}(XY) = E[X^2Y^2] - (E[XY])^2 = E[X^2]E[Y^2] - (E[XY])^2 = \\ &= [\text{var}(X) + E[X]^2] \cdot [\text{var}(Y) + E[Y]^2] - (E[XY])^2 = (0.75 + 1.5)^2 - 2.25^2 = 3.9375 \end{aligned}$$

γ)

$$P(XY > 1 | 2X + 2Y > 4) = \frac{P(XY > 1 \cap 2X + 2Y > 4)}{P(2X + 2Y > 4)}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε πιθανότητες γεγονότων που περιέχουν δύο τ.μ. (X, Y) , συνεπώς χρειαζόμαστε την από κοινού ρ.π.π.

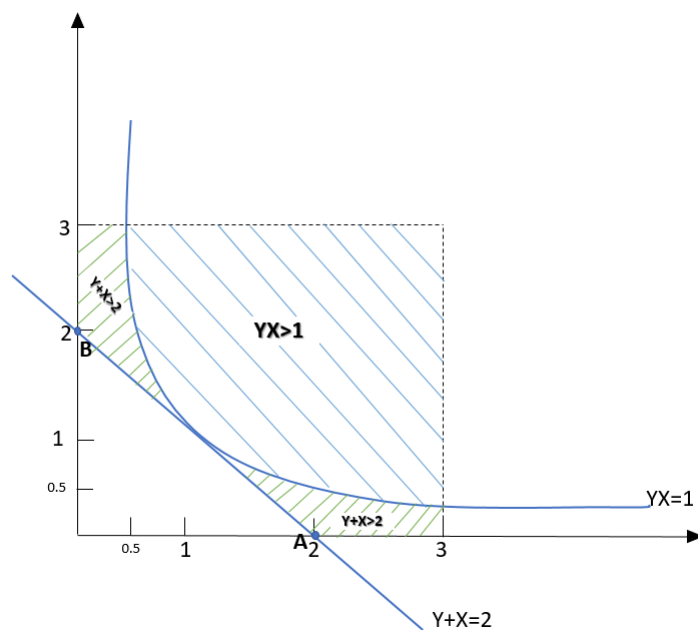
$$f_{X,Y}(x, y) = f(x)f(y) = \begin{cases} \frac{1}{9} & 0 \leq x, y \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

με X, Y ανεξάρτητες.

$$\begin{aligned} P(2X + 2Y > 4) &= \int_{x=0}^2 \int_{y=2-x}^3 \frac{1}{9} dy dx + \int_{x=2}^3 \int_{y=0}^3 \frac{1}{9} dy dx = \int_{x=0}^2 \left[\frac{y}{9} \right]_{2-x}^3 dx + \frac{1}{9} [x]_2^3 [y]_0^3 = \\ &= \int_{x=0}^2 \left[\frac{1+x}{9} \right] dx = \frac{3}{9} + \left[\frac{x}{9} + \frac{x^2}{18} \right]_0^2 = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{18} = 0.7778 \end{aligned}$$

Εναλλακτικά

$$P(2X + 2Y > 4) = 1 - E_{\text{OAB}} \cdot \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9} = 0.7778$$



Σχήμα 8: Εμβαδό για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας.

Τώρα

$$\begin{aligned}
 P(XY > 1 \cap 2X + 2Y > 4) &= P(XY > 1) = \int_{x=1/3}^3 \int_{y=1/x}^3 \frac{1}{9} dy dx = \int_{x=1/3}^3 \left[\frac{y}{9} \right]_{1/x}^3 dx = \int_{x=1/3}^3 \left(\frac{3}{9} - \frac{1}{9x} \right) dx = \\
 &= \left[\frac{3}{9}x - \frac{1}{9} \ln x \right]_{1/3}^3 = \frac{3}{9} - \frac{1}{9} - \frac{\ln 3}{9} + \frac{\ln 1/3}{9} = \frac{8}{9} - \frac{2}{9} \ln 3 = 0.6448
 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$P(XY > 1 | 2x + 2X > 4) = \frac{0.6448}{0.7778} = 0.8289$$