

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
11 Ιανουαρίου 2019 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 30 μονάδες. Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -1, \\ \frac{x+1}{3} & -1 \leq x < 2, \\ 1 & 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$

- (α) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(|X| \geq 0.4)$ και $P(X = 2)$.
(β) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X και δώστε την γραφική της παράσταση. Ποια είναι η κατανομή της X ;
(γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $Y = |X|$ και δώστε την γραφική της παράσταση.
(δ) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $Y = |X|$ και δώστε την γραφική της παράσταση.
(ε) Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά της τ.μ. $Y = |X|$.

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Η τάση που λαμβάνει ένας δέκτης μοντελοποιείται ως μία τ.μ. X . Όταν δεν μεταδίδεται σήμα, η τάση ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ -1 και 1 Volts. Όταν μεταδίδεται σήμα, η τάση ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 0 και +2 Volts. Υποθέτουμε ότι το σήμα μεταδίδεται με πιθανότητα 0.75.

- (α) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της X .
(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τάσης στο δέκτη, $E[X]$ και $var(X)$, αντίστοιχα.
(γ) Δεδομένου ότι η τάση στο δέκτη είναι 0.5 Volts, υπολογίστε την πιθανότητα ότι μεταδόθηκε σήμα.

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας κύλινδρος που παράγει ένα εργοστάσιο πρέπει να έχει μήκος L από 8.45cm έως 8.65cm και διάμετρο D από 1.55cm έως 1.60cm. Το τμήμα ποιοτικού ελέγχου του εργοστασίου γνωρίζει ότι η διαδικασία παραγωγής των κυλίνδρων γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε η τυχαία μεταβλητή L να ακολουθεί την κανονική κατανομή $L \sim N(8.54, 0.05^2)$ και η τυχαία μεταβλητή D να ακολουθεί την κανονική κατανομή $D \sim N(1.57, 0.01^2)$. Το μήκος και η διάμετρος των παραγόμενων κυλίνδρων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να βρεθεί:

- (α) Το ποσοστό των παραγόμενων κυλίνδρων που δεν επιτυγχάνουν τις προδιαγραφές του μήκους.
(β) Το ποσοστό των παραγόμενων κυλίνδρων που δεν επιτυγχάνουν τις προδιαγραφές της διαμέτρου.
(γ) Το ποσοστό των παραγόμενων κυλίνδρων που δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν.
(δ) Η πιθανότητα, σε ένα δείγμα 5 σωλήνων που επιλέχθηκε τυχαία από την παραγωγή του εργοστασίου, να μην είναι χρησιμοποιήσιμος ακριβώς ένας κύλινδρος.

Δίνεται ότι $\Phi(1.6)=0.9452$, $\Phi(1.8)=0.9641$, $\Phi(2.0)=0.9772$, $\Phi(2.2)=0.9861$, $\Phi(2.4)=0.9918$, $\Phi(2.6)=0.9953$, $\Phi(2.8)=0.9974$, $\Phi(3.0)=0.9987$, $\Phi(3.2)=0.9993$.

Θέμα 4 - 30 μονάδες. Θεωρούμε δύο ανεξάρτητες συνεχείς τ.μ. X και Y , ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[0, 3]$. Χρησιμοποιώντας τις δύο αυτές τ.μ., κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πλάτους X και μήκους Y .

- (α) Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά της περιμέτρου του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου.
(β) Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά της επιφάνειας του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου.
(γ) Δεδομένου ότι η περίμετρος του σχήματος είναι μεγαλύτερη από 4 μονάδες μήκους, υπολογίστε την πιθανότητα ότι η επιφάνειά του είναι μεγαλύτερη από 1 μονάδα επιφάνειας.