

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Έκτης Σειράς

Άσκηση 1. Εστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές που μοντελοποιούν τις ώρες άφιξης του Στέλιου και της Στέλλας μετά τις 6:00. Υποθέτοντας ότι ίσα χρονικά διαστήματα, έχουν ίσες πιθανότητες άφιξης, οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των προηγούμενων τυχαίων μεταβλητών γίνονται:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

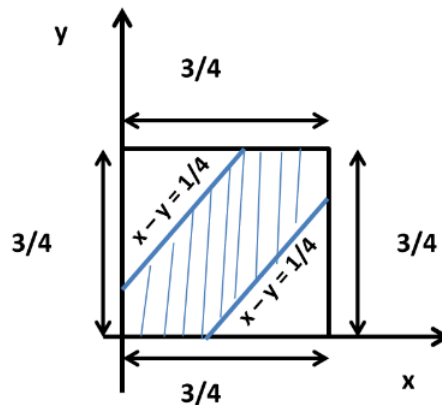
Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες. Επομένως, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας γίνεται:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq 1, \text{ και } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εφόσον 15 λεπτά είναι το $1/4$ της ώρας, η πιθανότητα που ζητείται είναι

$$E = 1 - 2 \cdot E_{tri} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}$$

και υπολογίζεται από το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης περιοχής του Σχήματος 1:



Σχήμα 1: Εμβαδό για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας.

Άσκηση 2. Από τη σχέση $U = \text{sign}(X + 2)$ συμπεραίνουμε ότι η τ.μ. Y παίρνει δύο τιμές, τις 1 και -1 όταν $X + 2 \geq 0$ και $X + 2 \leq 0$ αντίστοιχα. Επομένως, η Y είναι διακριτή τ.μ. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P_Y(-1) &= P(Y = -1) = P(X + 2 < 0) = P(X < -2) \\ &= \int_{-\infty}^{-2} f_x(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{2x} \right]_{-\infty}^{-2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

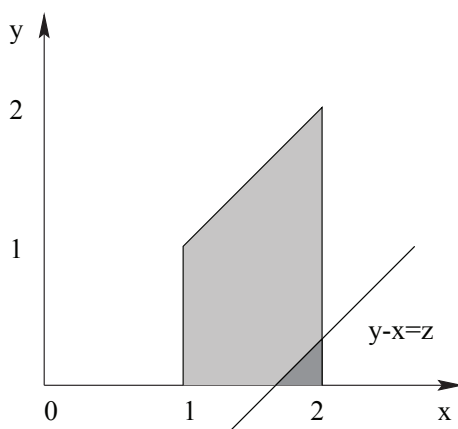
Προφανώς,

$$P_Y(1) = P(Y = 1) = P(X + 2 \geq 0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & y = -1 \\ \frac{3}{4}, & y = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 3. (α) Στο Σχήμα 4 φαίνεται η περιοχή όπου η $f_{X,Y}(x,y)$ παίρνει μη μηδενικές τιμές. Η από κοινού σ.π.π. πρέπει να έχει ολοκλήρωμα 1:

$$\int_{x=1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=x} axdydx = \frac{7}{3}a = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{7}.$$



Σχήμα 2: Το πεδίο τιμών των X και Y .

(β)

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} \int_1^2 \frac{3}{7}x dx & 0 \leq y \leq 1 \\ \int_y^2 \frac{3}{7}x dx & 1 < y \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{9}{14} & 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{13}{14}(4-y^2) & 1 < y \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(γ)

$$f_{X|Y}\left(x \left| \frac{3}{2} \right.\right) = \frac{f_{X,Y}\left(x, \frac{3}{2}\right)}{f_Y\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{8}{7}x, \text{ για } 3/2 \leq x \leq 2 \text{ και } 0 \text{ αλλού.}$$

Επομένως,

$$E\left[\frac{1}{X} \left| Y = \frac{3}{2} \right.\right] = \int_{3/2}^2 \frac{1}{x} \frac{8}{7}x dx = \frac{4}{7}.$$

(δ) Θα βρούμε πρώτα την α.σ.κ. και θα την παραγωγίσουμε για να βρούμε την ζητούμενη σ.π.π.

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\ &= P(Y - X \leq z) \\ &= \begin{cases} 0, & z < -2 \\ \int_{x=-z}^{x=2} \int_{y=0}^{y=x+z} \frac{3}{7}x dy dx = \frac{8}{7} + \frac{6}{7}z - \frac{1}{14}z^3, & -2 \leq z \leq -1 \\ \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=x+z} \frac{3}{7}x dy dx = 1 + \frac{9}{14}z, & -1 < z \leq 0 \\ 1, & 0 < z \end{cases} \end{aligned}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \begin{cases} \frac{6}{7} - \frac{3}{14}z^2 & -2 \leq z \leq -1 \\ \frac{9}{14} & -1 < z \leq 0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Άσκηση 4. (α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι να μιλάει η Μαρία με την φίλη της για πάνω από 15 λεπτά. Εφόσον $T \sim \text{Exp}(1/60)$ λεπτά είναι ο χρόνος που περνάει η Μαρία στο τηλέφωνο, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(T > 15) = \int_{15}^{\infty} \frac{1}{60} e^{-t/60} dt = e^{-1/4}$$

(β) Αν ο Αλέξανδρος δεν καταφέρει να τσεκάρει το Instagram του ακριβώς μια φορά, τότε $15 \leq T < 45$. Αν δεν τα καταφέρει ακριβώς 2 φορές, τότε $45 \leq T < 75$. Γενικά, αν δεν καταφέρει να τσεκάρει το Instagram του n φορές τότε: $15 + 30(n-1) \leq T < 30n + 15$. Ήρα:

$$P(\{15 + 30(n-1) \leq T < 30n + 15\}) = \int_{30n-15}^{30n+15} \frac{1}{60} e^{-t/60} dt = e^{-n/2}(e^{1/4} - e^{-1/4})$$

Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα να μην ελέγξει ο Αλέξανδρος 3 φορές το Instagram του είναι $e^{-3/2}(e^{1/4} - e^{-1/4})$.

Άσκηση 5. (α) $X \sim U[2, 5]$ επομένως,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , 2 \leq x \leq 5 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

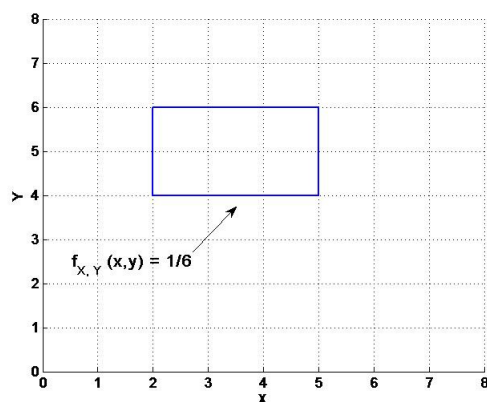
$Y \sim U[4, 6]$ επομένως,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , 4 \leq y \leq 6 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

Καθώς οι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.,

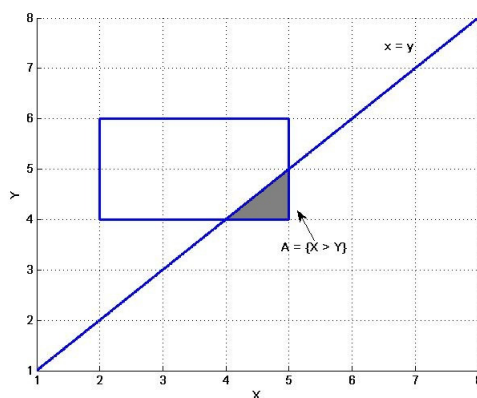
$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , 2 \leq x \leq 5 \text{ και } 4 \leq y \leq 6 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

Δηλαδή, οι X και Y ακολουθούν μια από κοινού ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $\{2 \leq x \leq 5, 4 \leq y \leq 6\}$ με γραφική παράσταση:



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π .

$$(\beta) P(A) = P(X > Y)$$



Από το σχήμα, είναι προφανές ότι $P(X > Y) = \frac{1}{6}$. $E_{X>Y} = \frac{1}{6} \times 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

(γ) Το πλήθος των αγώνων, W , που κερδίζει ο Νίκος σε 6 προσπάθειες ακολουθεί Διωνυμική κατανομή: $W \sim \Delta(n = 6, p = 1/12)$. Συνεπώς $P(W = 4) = \binom{6}{4} \left(\frac{1}{12}\right)^4 \left(\frac{11}{12}\right)^2$.

Άσκηση 6.

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό των πόντων ενός παίκτη. Τότε $f_X(x) = 0.5f_1(x) + 0.5f_2(x)$, όπου:

$$f_1(x) \begin{cases} 1 & , x \in [1, 2] \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι η σ.π.π. για τον πρώτο τρόπο συλλογής πόντων και

$$f_2(x) \begin{cases} 1/3 & , x \in [0, 3] \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι η σ.π.π. για τον δεύτερο τρόπο συλλογής πόντων. Παρατηρήστε ότι η τιμές της $f_X(x)$ στα σημεία $\{0, 1, 2, 3\}$ δεν έχουν σημασία, αφού αλλάζοντας τιμή της σ.π.π. σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων δεν επηρεάζεται η κατανομή πιθανοτήτων. Ομοίως, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X είναι γραμμική συνάρτηση:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x/6 & , x \in [0, 1] \\ 1/6 + (2/3)(x - 1) & , x \in [1, 2] \\ 5/6 + (1/6)(x - 2) & , x \in [2, 3] \\ 1 & , x > 3 \end{cases}$$

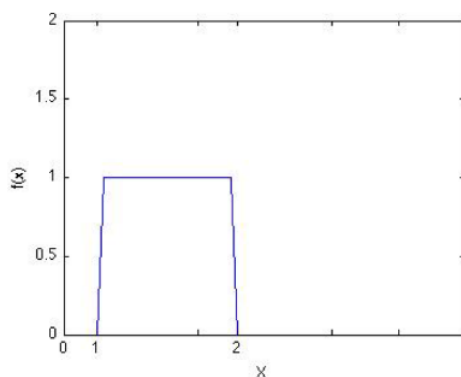
Εφόσον το γράφημα της $f_X(x)$ είναι συμμετρικό σε σχέση με τον άξονα $x = 3/2$, τότε $E[X] = 3/2$. Τέλος, εφόσον:

$$E[X^2] = \frac{1}{6} \int_0^1 x^2 dx + \frac{3}{2} \int_1^2 x^2 dx + \frac{1}{6} \int_2^3 x^2 dx = \frac{8}{3},$$

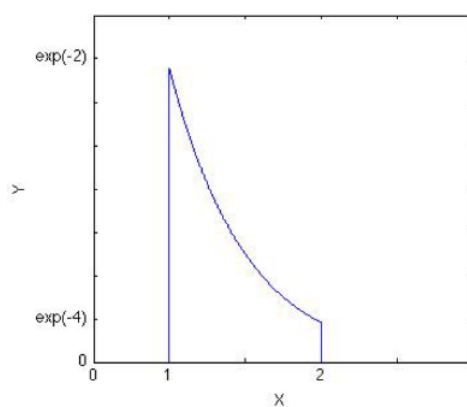
τότε:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{5}{12}.$$

Άσκηση 7. (α) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X , καθώς και ο μετασχηματισμός $Y = g(X)$, φαίνονται στις επόμενες γραφικές παραστάσεις.



Σχήμα 4: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$



Σχήμα 5: Μετασχηματισμός $Y = g(X)$

(β) Από το σχήμα βλέπουμε ότι η τ.μ X παίρνει τιμές στο διάστημα $[e^{-4}, e^{-2}]$. Άρα:

- Για $y < e^{-4}$, έχουμε ότι $F_Y(y) = 0$
- Για $e^{-4} < y < e^{-2}$, έχουμε ότι $F_Y(y) = 1$
- Για $e^{-4} \leq y \leq e^{-2}$, έχουμε ότι:

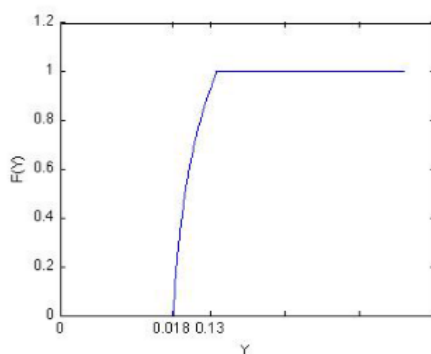
$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(e^{-2X} < y) = P(-2X < \ln y) =$$

$$P(X > -\frac{1}{2} \ln y) = \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^{+\infty} 1 dx = 2 + \frac{1}{2} \ln y$$

Οπότε έχουμε:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < e^{-4} \\ 2 + \frac{1}{2y} \ln y & e^{-4} \leq y \leq e^{-2} \\ 1 & e^{-2} \leq y \end{cases}$$

(γ) Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 7.



Σχήμα 6: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$

Έχουμε ότι:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2} & e^{-4} \leq y \leq e^{-2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(δ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(Y \leq e^{-3}) = F_Y(e^{-3}) = 2 + \frac{1}{2} \ln(e^{-3}) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

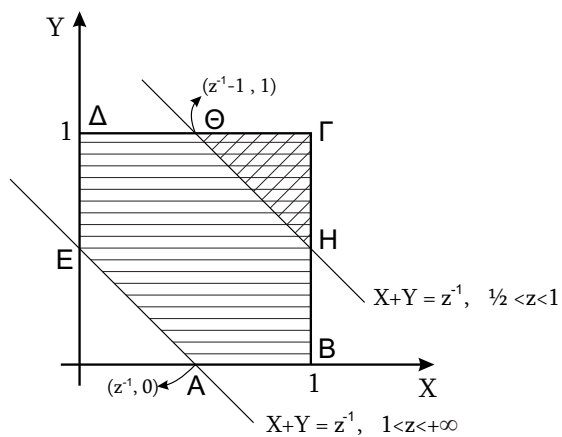
Άσκηση 8. (α) Αφού οι X, Y είναι ανεξάρτητες,

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Έχουν δηλαδή από κοινού ομοιόμορφη κατανομή.

(β) Το πεδίο τιμών της τ.μ. Z είναι το $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P\left(\frac{1}{X+Y} \leq z\right) \\
&= P(X+Y \geq z^{-1}) \\
&= \begin{cases} 0, & z < 1/2 \\ 1 \cdot E_{H\Gamma\Theta}, & 1/2 \leq z \leq 1 \\ 1 \cdot E_{AB\Gamma\Delta E}, & 1 < z < +\infty \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & z < 1/2 \\ \frac{(2-z^{-1})^2}{2}, & 1/2 \leq z \leq 1 \\ 1 - \frac{z^{-2}}{2}, & 1 < z < +\infty \end{cases}
\end{aligned}$$



(γ)

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} 2z^{-2} - z^{-3}, & 1/2 \leq z \leq 1 \\ z^{-3}, & 1 < z < +\infty \end{cases}$$