

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 6/12/2018

Ημερομηνία Παράδοσης: 20/12/2018

Άσκηση 1. Ο Στέλιος και η Στέλλα θέλουν να πάνε σινεμά για να δουν την τελευταία ταινία των *Avengers*. Η ταινία ξεκινά στις 7:20, οπότε αποφασίζουν να συναντηθούν έξω από το σινεμά μεταξύ τις 6:00 μ.μ και 7:00 μ.μ. Την Στέλλα όμως την σκοτώνει η αναμονή, οπότε θέτει στον Στέλιο τον όρο ότι κανένας τους δεν θα περιμένει τον άλλο για περισσότερο από ένα τέταρτο. Ποια είναι η πιθανότητα να συναντηθούν έξω από τον σινεμά;

Άσκηση 2. Η τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^{-2}, & |x| \geq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ορίζουμε τη νέα τ.μ. Y ως

$$Y = \text{sign}(X + 2),$$

όπου

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Τι είδους τ.μ. είναι η Y ; Υπολογίστε την κατανομή της.

Άσκηση 3. Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ax & \text{για } 1 \leq x \leq 2 \text{ και } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου a μία σταθερά.

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση του πεδίου τιμών των τ.μ. X και Y και υπολογίστε το a .

(β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ. Y , $f_Y(y)$.

(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π.π. της τ.μ. X δεδομένου του $Y = 3/2$, $f_{X|Y}(x|\frac{3}{2})$, και μετά την δεσμευμένη μέση τιμή του $\frac{1}{X}$ δεδομένου του $Y = 3/2$, $E[\frac{1}{X}|Y = 3/2]$.

(δ) Η τ.μ. Z ορίζεται ως $Z = Y - X$. Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Z(z)$, και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Z(z)$, της τ.μ. Z .

Άσκηση 4. Ο Αλέξανδρος έχει στείλει το κινητό του τηλέφωνο για επισκευή και προς το παρόν, η αδερφή του η Μαρία μοιράζεται το τηλέφωνό της μαζί του. Ο Αλέξανδρος χρησιμοποιεί το κινητό για να τσεκάρει τον λογαριασμό του στο *Instagram* δύο φορές την ώρα, κάθε "και τέταρτο" και κάθε "πρά τέρτατο". Στις 6 το απόγευμα η Μαρία αποφασίζει να πάρει τηλέφωνο τη φίλη της. Το χρονικό διάστημα που μιλούν τα δύο κορίτσια μοντελοποιείται από μία εκθετική τ.μ. T με παράμετρο $\lambda = 1/60$, δηλαδή $T \sim \text{Exp}(1/60)$ (σε λεπτά). Προφανώς, ο Αλέξανδρος δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει το τηλέφωνο όσο το έχει η αδερφή του.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Αλέξανδρος θα χάσει έναν ή περισσότερους προγραμματισμένους ελέγχους του *Instagram* του.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Αλέξανδρος θα χάσει ακριβώς τρεις προγραμματισμένους ελέγχους του *Instagram* του.

Άσκηση 5. Ο Κώστας και ο Νίκος συναγωνίζονται σε αγώνες δρόμου. Οι χρόνοι τους είναι οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X και Y , αντίστοιχα, που ακολουθούν ομοιόμορφες κατανομές. Οι χρόνοι του Κώστα (οι τιμές της τ.μ. X) μεταβάλλονται στο διάστημα $[2, 5]$ ενώ οι χρόνοι του Νίκου (οι τιμές της τ.μ. Y) μεταβάλλονται στο διάστημα $[4, 6]$.

(α) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, $f_{X,Y}(x,y)$, των τ.μ. X και Y .

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(A)$, να κερδίσει τον αγώνα ο Νίκος.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα με την οποία ο Νίκος κερδίζει ακριβώς 4 στους 6 αγώνες. Υποθέστε ότι το αποτέλεσμα κάθε αγώνα είναι ανεξάρτητο από αυτά των υπολοίπων.

Άσκηση 6. Σε ένα τηλεπαιχνίδι οι παίκτες πρέπει να κερδίσουν πόντους ώστε να έχουν πιθανότητες να κερδίσουν το χρηματικό έπαθλο. Οι παίκτες κερδίζουν πόντους με δύο τρόπους. Με τον πρώτο τρόπο, ένας παίκτης θα κερδίσει τελικά X πόντους, όπου X είναι συνεχής ομοιόμορφη τ.μ στο διάστημα $[1,2]$. Με τον δεύτερο τρόπο, ένας παίκτης θα κερδίσει Y πόντους, όπου Y είναι επίσης συνεχής ομοιόμορφη τ.μ στο διάστημα $[0,3]$. Ο τρόπος με τον οποίο οι παίκτες θα κερδίσουν πόντους καθορίζεται με την ρίψη ενός κέρματος στην αρχή του παιχνιδιού. Να υπολογιστούν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, η μέση τιμή και η διασπορά των πόντων που μάζεψε ένας παίκτης.

Άσκηση 7. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X η οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ των τιμών 1 και 2, δηλαδή: $X \sim U[1,2]$.

Ορίζουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή ως εξής: $Y = e^{-2X}$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = e^{-2X}$ καθώς και αυτή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, $f_X(x)$ της τ.μ X .

(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$ της τυχαίας μεταβλητής Y και δώστε τη γραφική παράστασή της.

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$ της Y και δώστε τη γραφική παράστασή της.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y \leq e^{-3})$.

Άσκηση 8. Οι ανεξάρτητες συνεχείς τ.μ. X και Y ακολουθούν καθεμιά ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$. Ορίζουμε την τ.μ. $Z = \frac{1}{X+Y}$.

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. των X και Y .

(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Z , $F_Z(z)$.

(γ) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z , $f_Z(z)$.