

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2018-19

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

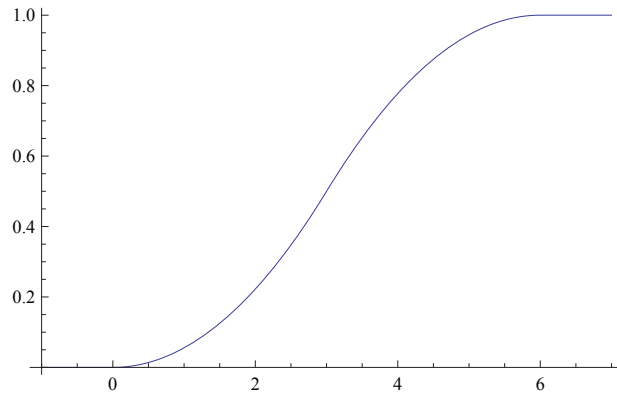
Άσκηση 1.

(α) Από τις ιδιότητες μιας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας έχουμε ότι:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_0^3 cx dx + \int_3^6 c(6-x) dx = 9c \Rightarrow c = 1/9.$$

(β) Επειδή έχουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή, θα ισχύει ότι: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$. Οπότε θα έχουμε:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{9} \int_0^x u du = \frac{x^2}{18}, & 0 \leq x < 3 \\ \frac{1}{9} \int_0^3 u du + \frac{1}{9} \int_3^x (6-u) du = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} (6-u)^2 \Big|_3^x = 1 - \frac{(6-x)^2}{18}, & 3 \leq x < 6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$.

Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$ φαίνεται στο σχήμα 1.

(γ) Είναι εύκολα αντιληπτό ότι η $F_X(x)$ είναι μη φθίνουσα και ότι $0 \leq F_X(x) \leq 1$ για κάθε τιμή του x , τόσο από το παραπάνω σχήμα όσο και από την ανάλυση των συναρτήσεων $x^2/18$ και $1 - (6-x)^2/18$ στα διαστήματα $[0, 3]$ και $[3, 6]$, αντίστοιχα. Επιπλέον, ισχύει ότι: $F_X(-\infty) = F_X(0) = 0$ και $F_X(+\infty) = F_X(6) = 1$. Τέλος, είναι εύκολα αντιληπτό ότι η $F_X(x)$ είναι συνεχής παντού, ακόμη και στα σημεία $x = 0$, $x = 3$ και $x = 6$.

(δ) Έχουμε ότι:

$$P(A) = P(X > 3) = 1 - F_X(3) = 0.5.$$

Παρομοίως:

$$P(B) = P(1.5 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X < 1.5) = F_X(9) - F_X(1.5^-) = 1 - 0.125 = 0.875.$$

(ε) Η τομή των A και B είναι το γεγονός $\{3 < X \leq 9\}$. Άρα,

$$P(A \cap B) = P(3 < X \leq 9) = P(X > 3) = 0.5 = P(A) \neq P(A)P(B)$$

Επομένως, τα δύο γεγονότα δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 2.

Ισχύει ότι,

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) = \begin{cases} 3\alpha^3 x^{-4}, & x \geq \alpha \\ 0, & x < \alpha \end{cases}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{\alpha}^{+\infty} x 3\alpha^3 x^{-4} dx \\ &= 3\alpha^3 \int_{\alpha}^{+\infty} x^{-3} dx \\ &= 3\alpha^3 \left(-\frac{1}{2} x^{-2} \right) \Big|_{\alpha}^{+\infty} \\ &= \frac{3\alpha}{2} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{\alpha}^{+\infty} x^2 3\alpha^3 x^{-4} dx \\ &= 3\alpha^3 \int_{\alpha}^{+\infty} x^{-2} dx \\ &= 3\alpha^3 \left(-x^{-1} \right) \Big|_{\alpha}^{+\infty} \\ &= 3\alpha^2 \end{aligned}$$

Άρα, η διασπορά είναι,

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 3\alpha^2 - \left(\frac{3\alpha}{2} \right)^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$$

Άσκηση 3.

Ισχύει ότι $X^2 - 12X + 35 = (X - 5)(X - 7)$. Οπότε, $X^2 - 12X + 35 > 0$ αν και μόνο αν $\{X > 7\} \cup \{X < 5\}$. Εφόσον $X \sim U[2, 10]$, $f_X(x) = 1/8$ για $x \in [2, 10]$ και $f_X(x) = 0$ αλλού. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X^2 - 12X + 35 > 0) &= P((\{X > 7\} \cup \{X < 5\}) \cap \{2 \leq X \leq 10\}) \\ &= P(\{2 \leq X < 5\} \cup \{7 < X \leq 10\}) \\ &= P(\{2 \leq X < 5\}) + P(\{7 < X \leq 10\}) \\ &= 1/8 \times (5 - 2) + 1/8 \times (10 - 7) \\ &= 1/8 \times 3 + 1/8 \times 3 = 0.75. \end{aligned}$$

Άσκηση 4.

1. Ένα λάθος συμβαίνει όταν :

- Το σύστημα συμπεραίνει 0 ή 1, ενώ στάλθηκε -1.
- Το σύστημα συμπεραίνει -1 ή 1, ενώ στάλθηκε 0.
- Το σύστημα συμπεραίνει -1 ή 0, ενώ στάλθηκε 1.

Επομένως, η πιθανότητα λάθους, $P(e)$, είναι :

$$\begin{aligned} P(e) &= P(X = -1)P(Y \geq -\frac{1}{2}|X = -1) + P(X = 0)P(Y < -\frac{1}{2} \text{ OR } Y > \frac{1}{2}|X = 0) \\ &+ P(X = 1)P(Y \leq \frac{1}{2}|X = 1) \\ &= \frac{1}{3}P(N \geq \frac{1}{2}) + \frac{1}{3}P(N < -\frac{1}{2} \text{ OR } N > \frac{1}{2}) + \frac{1}{3}P(N \leq -\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής

$$P(N \geq \frac{1}{2}) = P(N \leq -\frac{1}{2})$$

Καθώς η N είναι γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή, μπορούμε να υπολογίσουμε την $P(N \geq n)$ χρησιμοποιώντας την Φ συνάρτηση,

Επομένως

$$\begin{aligned} P(e) &= \frac{4}{3}P(N \geq \frac{1}{2}) \\ &= \frac{4}{3}(1 - \Phi(\frac{1}{2})) \\ &= 0.535 \end{aligned}$$

2. Ομοίως,

$$\begin{aligned} P(e) &= P(X = -2)P(Y \geq -\frac{1}{2}|X = -2) + P(X = 0)P(Y < -\frac{1}{2} \text{ OR } Y > \frac{1}{2}|X = 0) \\ &+ P(X = 2)P(Y \leq \frac{1}{2}|X = 2) \\ &= \frac{1}{3}P(N \geq \frac{3}{2}) + \frac{1}{3}P(N < -\frac{1}{2} \text{ OR } N > \frac{1}{2}) + \frac{1}{3}P(N \leq -\frac{3}{2}) \end{aligned}$$

Μετά από πράξεις

$$\begin{aligned} P(e) &= \frac{2}{3}(1 - \Phi(\frac{3}{2})) + \frac{2}{3}(1 - \Phi(\frac{1}{2})) \\ &= 0.418 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η πιθανότητα λάθους στη δεύτερη περίπτωση μειώθηκε λόγω της μεγαλύτερης απόστασης των συμβόλων.

Άσκηση 5.

(α)

$$F(u) = \begin{cases} 0, & \text{αν } u < 0 \\ u^2, & \text{αν } 0 \leq u < 1 \\ 1, & \text{αν } u \geq 1 \end{cases}$$

είναι έγκυρη ΑΣΚ. $P\{|X| > 0.5\} = 1 - F(0.5) = \frac{3}{4}$.

(β)

$$F(u) = \begin{cases} 0, & \text{αν } u < 1 \\ 2u - u^2, & \text{αν } 1 \leq u \leq 2 \\ 1, & \text{αν } u > 2 \end{cases}$$

δεν είναι έγκυρη ΑΣΚ, αφού $F(1) = 1 > F(2) = 0$.

(γ)

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp(2u), & \text{αν } u \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{4} \exp(-3u), & \text{αν } u > 0 \end{cases}$$

δεν είναι έγκυρη ΑΣΚ αφού δεν είναι συνεχής από δεξιά.

(δ)

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp(2u), & \text{αν } u < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \exp(-3u), & \text{αν } u \geq 0 \end{cases}$$

είναι έγκυρη ΑΣΚ. $P\{|X| > 0.5\} = 1 - P\{|X| \leq 0.5\} = 1 - (F(0.5) - F(-0.5)) = \frac{1}{2} \exp(-1.5) + \frac{1}{2} \exp(-1)$.

Άσκηση 6.

Είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε την $P(X > Y)$ παίρνοντας δεσμευμένη πιθανότητα πάνω στη μεταβλητή Y και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \sum_{y=0}^{\infty} P(X > Y | Y = y) P(Y = y) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} P(X > y) P(Y = y) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda y} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-\lambda})^y}{y!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{-\lambda}} = e^{\lambda(e^{-\lambda}-1)} \end{aligned}$$

Άσκηση 7.

Πρωτού ξεκινήσουμε ας θυμηθούμε μερικές χρήσιμες εξισώσεις για τις εκθετικές τυχαίες μεταβλητές. Έστω Z μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda > 0$:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z f_Z(t) dt = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \end{cases}$$

(α) Έστω A το γεγονός ότι η λάμπα που επιλέχθηκε είναι της εταιρίας Α (οπότε η τ.μ. X , του χρόνου μέχρι την πρώτη αλλαγή λάμπας, είναι μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda = 1$ δεδομένου του γεγονότος A). Τότε το A^c είναι το γεγονός ότι η λάμπα που επιλέχθηκε είναι της εταιρίας Β (οπότε η X είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda = 3$ δεδομένου του γεγονότος A^c). Πρώτα υπολογίζουμε τις $P(D|A)$ και $P(D|A^c)$:

$$\begin{aligned} P(D|A) &= P(X > t|A) \\ &= 1 - F_{X|A}(t) \\ &= e^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(D|A^c) &= P(X > t|A^c) \\ &= 1 - F_{X|A^c}(t) \\ &= e^{-3t} \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε την $P(D)$, χρησιμοποιούμε το θεώρημα της ολικής πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A) \cdot P(A) + P(D|A^c) \cdot P(A^c) \\ &= e^{-t} \cdot \frac{1}{2} + e^{-3t} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^{-t} + e^{-3t}}{2} \end{aligned}$$

(β) Έστω C_{1A} το γεγονός ότι η πρώτη λάμπα που χρησιμοποιούμε προέρχεται από την εταιρία Α. Παρατηρούμε ότι το γεγονός C_{1A} είναι ισοδύναμο με το γεγονός A του υποερωτήματος (α). Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes έχουμε ότι:

$$P(C_{1A}|D) = P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{e^{-t} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{e^{-t} + e^{-3t}}{2}} = \frac{e^{-t}}{e^{-t} + e^{-3t}}$$

Άσκηση 8.

(α) $P\{X < 0\} = \Phi\left(\frac{0 - (-10)}{2}\right) = \Phi(5)$

(β) $P\{-10 < X < 5\} = \Phi\left(\frac{5 - (-10)}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-10 - (-10)}{2}\right) = \Phi(7.5) - \Phi(0)$

(γ) $P\{|X| \geq 5\} = P\{X \leq -5\} + P\{X \geq 5\} = \Phi\left(\frac{-5 - (-10)}{2}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{5 - (-10)}{2}\right) = \Phi(2.5) + 1 - \Phi(7.5)$

(δ) $P\{X^2 - 3X + 2 > 0\} = P\{(X - 1)(X - 2) > 0\} = P\{X < 1\} + P\{X > 2\} = \Phi\left(\frac{1 - (-10)}{2}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{2 - (-10)}{2}\right) = \Phi(5.5) + 1 - \Phi(6)$