

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2018-19

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 22/11/2018

Ημερομηνία Παράδοσης: 6/12/2018

Άσκηση 1.

Η ποσότητα ψωμιού (σε εκατοντάδες κιλά) που πουλάει ένα αρτοποιείο κατά τη διάρκεια μιας ημέρας είναι συνεχής τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x < 3 \\ c(6-x) & 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c .

(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, της τ.μ. X .

(γ) Δώστε τη γραφική παράσταση της $F_X(x)$ και δείξτε ότι είναι μία έγκυρη α.σ.κ.

(δ) Ποια η πιθανότητα ότι σε μία ημέρα θα πουληθούν: (i) περισσότερα από 300 κιλά ψωμί, (ii) μεταξύ 150 και 900 κιλών ψωμί;

(ε) Αν A και B είναι τα γεγονότα (i) και (ii), αντίστοιχα, είναι τα A και B ανεξάρτητα;

Άσκηση 2.

Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X , με αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a^3}{x^3}, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$$

όπου a είναι μία θετική σταθερά.

Άσκηση 3.

Δίδεται η τ.μ. $X \sim U[2, 10]$, δηλαδή, η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[2, 10]$. Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $X^2 - 12X + 35 > 0$.

Άσκηση 4.

Ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα αποτελείται από μια πηγή πληροφορίας, ένα κανάλι μετάδοσης και ένα δέκτη. Θεωρείστε μια πηγή πληροφορίας που παράγει ένα εκ τριών συμβόλων με την ίδια πιθανότητα. Στη συνέχεια, το κανάλι εισάγει θόρυβο παραμορφώνοντας το σήμα που έχει επιλεγεί για την αποστολή του εκάστοτε συμβόλου. Έτσι, ο δέκτης λαμβάνει την τιμή $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{N}$, όπου $\mathbf{X}$ η τιμή που στάλθηκε και $\mathbf{N}$ τυχαία μεταβλητή, που παριστάνει προσθετικό θόρυβο με κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2 = 4$.

1. Υποθέστε ότι ο πομπός κωδικοποιεί τα 3 σύμβολα ως -1, 0, 1. Στον δέκτη το λαμβανόμενο μήνυμα αποκωδικοποιείται ως εξής:

- Αν $Y > \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 1.
- Αν $Y < -\frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο -1.
- Αν $-\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 0.

Καθορίστε την πιθανότητα λάθους για το παραπάνω σχήμα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης.

2. Σε μια προσπάθεια να μειωθεί η πιθανότητα λάθους, γίνονται οι ακόλουθες τροποποιήσεις. Ο πομπός κωδικοποιεί τους 3 τύπους μηνυμάτων με τιμές -2, 0 και 2, ενώ ο δέκτης αποκωδικοποιεί ως εξής:

- Αν $Y > \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 2.
- Αν $Y < -\frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο -2.
- Αν $-\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 0.

Επαναλάβετε το βήμα (α) για αυτό το σχήμα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

Άσκηση 5.

Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις $F(u)$ είναι έγκυρες αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής (ΑΣΚ); Για εκείνες οι οποίες είναι έγκυρες ΑΣΚ, να υπολογίσετε την πιθανότητα ότι η απόλυτη τιμή της τυχαίας μεταβλητής υπερβαίνει το 0.5.

(α)

$$F(u) = \begin{cases} 0 & u < 0, \\ u^2 & 0 \leq u < 1, \\ 1 & u \geq 1 \end{cases}$$

(β)

$$F(u) = \begin{cases} 0 & u < 1, \\ 2u - u^2 & 1 \leq u \leq 2, \\ 1 & u > 2 \end{cases}$$

(γ)

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2u} & u \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{4}e^{-3u} & u > 0 \end{cases}$$

(δ)

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2u} & u < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-3u} & u \geq 0 \end{cases}$$

Άσκηση 6.

Ο Περικλής και ο Ερμόλαος παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι. Ο Περικλής διαλέγει τυχαία έναν αριθμό X από μία γεννήτρια που παράγει δείγματα μιας τ.μ. που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Συγχρόνως, ο Ερμόλαος διαλέγει τυχαία έναν αριθμό Y από μία γεννήτρια που παράγει δείγματα μιας Poisson τ.μ. με παράμετρο επίσης λ . Αν ο αριθμός του Περικλή είναι μεγαλύτερος από αυτόν του Ερμόλαου, τότε συνεχίζουν το παιχνίδι διαλέγοντας δύο νέους αριθμούς. Αλλιώς, το παιχνίδι τελειώνει. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι το παιχνίδι θα κρατήσει πάνω από ένα γύρο.

Βοήθεια: Για να υπολογίσετε τη ζητούμενη πιθανότητα, χρησιμοποιείτε το θεώρημα ολικής πιθανότητας παίρνοντας ως διαμέριση του δειγματοχώρου τα γεγονότα $\{Y = y\}$.

Άσκηση 7.

Ξεκινώντας τη χρονική στιγμή $t = 0$, αρχίζουμε να χρησιμοποιούμε λάμπες, μία κάθε φορά, για να φωτίσουμε ένα δωμάτιο. Κάθε νέα λάμπα επιλέγεται ανεξάρτητα και ισοπίθανα από δύο εταιρίες A και B. Η διάρκεια ζωής (σε ώρες) κάθε λάμπας ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda_A = 1$, αν η λάμπα προέρχεται από την εταιρία A και με παράμετρο $\lambda_B = 3$, αν η λάμπα προέρχεται από την εταιρία B.

(α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας, υπολογίστε την πιθανότητα $P(D)$, ότι δεν θα πραγματοποιηθεί καμία αλλαγή λάμπας στις πρώτες t ώρες αυτού του πειράματος.

(β) Δεδομένου ότι δεν έχουμε χαλασμένη λάμπα κατά τη διάρκεια των πρώτων t ωρών, υπολογίστε την πιθανότητα ότι η πρώτη λάμπα που χρησιμοποιούμε προέρχεται από την εταιρία A (χρησιμοποιείτε τον κανόνα του Bayes).

Άσκηση 8.

Έστω ότι η τ.μ. X ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή -10 και διασπορά $\sigma^2 = 4$, δηλαδή $X \sim N(-10, 4)$. Να υπολογίσετε τις παρακάτω πιθανότητες συναρτήσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής (ΑΣΚ) της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$, με θετικά ορίσματα του x .

(α) $P(X < 0)$ (β) $P(-10 < X < 5)$ (γ) $P(|X| \geq 5)$ (δ) $P(X^2 - 3X + 2 > 0)$