

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω ότι ο τροχός σταματά σε κάθε αριθμό με πιθανότητα ίση με $1/6$. Έστω ακόμα ότι το κάθε αποτέλεσμα του τροχού είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα. Μπορούμε να θεωρήσουμε λοιπόν ότι ο αριθμός των φορών όπου ο αριθμός που στοιχημάτισε ο παίκτης είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $(3, 1/6)$. Έστω λοιπόν X τα κέρδη του παίκτη. Για να προσδιορίσουμε αν αυτό συμφέρει ή όχι τον παίκτη, θα πρέπει να βρούμε την μέση τιμή $E[X]$. Οπότε έχουμε:

$$P(X = -1) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$$

$$P(X = -1) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$$

Η μέση τιμή λοιπόν είναι:

$$E[X] = \frac{-125 + 75 + 30 + 3}{216} = -\frac{17}{216}$$

Άρα ο παίκτης θα χάνει 17 μονάδες σε κάθε 216 παιχνίδια.

Άσκηση 2.

(α') Σύμφωνα με το αξίωμα της κανονικοποίησης, θα πρέπει το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των ενδεχόμενων μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής να ισούται με 1, δηλαδή:

$$1 = \sum_{x=-2}^2 p_X(x) = \frac{1}{c}(2 + 1 + 0 + 1 + 2) = \frac{6}{c}$$

$$\Rightarrow c = 6$$

(β') Έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_x x \cdot p_X(x) = \sum_{x=-2}^2 x \frac{|x|}{6} \\ &= \frac{1}{6}[-2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Γενικά, κάθε τυχαία μεταβλητή X με άρτια ΣΠΠ πρέπει να έχει $E[X] = 0$.

Σημείωση: μια συνάρτηση λέγεται άρτια αν $f(x) = f(-x)$, δηλαδή είναι συμμετρική γύρω από τον άξονα των y .

(γ') Αφού $E[X] = 0$, έχουμε $Z = X^2$. Συνεπώς:

$$p_Z(z) = P(\{Z = z\}) = P(\{X^2 = z\}).$$

Εφόσον το X μπορεί να πάρει τις τιμές $\pm 1, \pm 2$ (με μη-αρνητική πιθανότητα), η τ.μ. $Z = X^2$ μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 1, 4.

Άρα

$$p_Z(z) = P(\{X^2 = z\}) = p_X(-\sqrt{z}) + p_X(\sqrt{z}) = \frac{|-\sqrt{z}|}{6} + \frac{|\sqrt{z}|}{6} = \frac{\sqrt{z}}{3}, \quad \text{για } z = 1, 4$$

(δ') Η διασπορά μιας τ.μ. X δίδεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E\{(X - E[X])^2\} = E[Z] \\ &= \sum_{z=1,4} z \cdot p_Z(z) \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{4}}{3} + 1 \cdot \frac{\sqrt{1}}{3} = 3. \end{aligned}$$

(ε') Θα πρέπει να προσθέσουμε το άθροισμα των x με μη-μηδενική πιθανότητα:

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \sum_{x=\pm 2, \pm 1} (x - E[X])^2 p_X(x) = (-2)^2 p_X(-2) + (-1)^2 p_X(-1) + 1^2 p_X(1) + 2^2 p_X(2) \\ &= 4 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{8 + 1 + 1 + 8}{6} = 3. \end{aligned}$$

Άσκηση 3. Έστω n ο αριθμός των ατόμων που περιέχονται στο 1 γραμμάριο του υλικού. Στο χρονικό διάστημα του ενός δευτερολέπτου, το κάθε άτομο έχει πιθανότητα $3.2n$ να διασπαστεί και να παράξει ένα σωματίδιο δ . Από αυτό μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο αριθμός των ατόμων που διασπούνται είναι μια μεταβλητή *Poisson* με $\lambda=3.2$. Άρα η πιθανότητα που ζητούμε είναι:

$$P\{X \leq 2\} = e^{-3.2} + 3.2e^{-3.2} + \frac{3.2^2}{2}e^{-3.2}$$

Άσκηση 4. (α) Έστω X ο αριθμός των χαμένων πακέτων σε ένα καρέ. Αναγνωρίσουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 1000$ και $p = 0.001$, δηλαδή $X \sim \Delta(n = 1000, p = 0.001)$. Παρατηρούμε *buffering* όταν $X \geq 5$. Συνεπώς,

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^4 \binom{1000}{k} (0.001)^k (0.999)^{1000-k} = 0.003637$$

(β) Καθώς το n είναι μεγάλο και το p μικρό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την *Poisson* προσέγγιση της Διωνυμικής. Έστω Y μία *Poisson* τ.μ. με παραμέτρους $\lambda = np = 1000 \cdot 10^{-3} = 1$. Σύμφωνα με τη *Poisson* προσέγγιση, η πιθανότητα ότι πέντε ή περισσότερα πακέτα ενός καρέ θα χαθούν προσεγγίζεται από:

$$P(X \geq 5) \approx P(Y \geq 5) = 1 - P(Y \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^4 \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = 1 - e^{-1} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 0.00366$$

Άσκηση 5. (α) Από τη στιγμή που το ζάρι είναι δίκαιο, γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να έρθει η κάθε πλευρά του ζαριού είναι ίση με $\frac{1}{6}$. Άρα για την μέση τιμή έχω ότι:

$$E[X] = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

και για την διασπορά έχω:

$$E[X^2] = 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

Συνεπώς

$$\text{var}(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

(β) Θέτουμε $Y = X^2$. Η σ.π.π της Y δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$P\{Y = 1\} = P\{X = -1\} + P\{X = 1\} = 0.5$$

$$P\{Y = 0\} = P\{X = -0\} = 0.5$$

Άρα

$$E[Y] = E[X^2] = 1 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5 = 0.5$$

(γ) Έστω Ξ ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών στην τελευταία σελίδα των σημειώσεών σας. Έχουμε πως

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - e^{-1/2} \approx 0.393$$

(δ) Από την στιγμή που ο μαθητής επιλέγεται τυχαία ισχύει ότι:

$$P\{X = 44\} = \frac{44}{120}, P\{X = 36\} = \frac{36}{120}, P\{X = 40\} = \frac{40}{120}$$

άρα:

$$E[X] = 44\left(\frac{11}{30}\right) + 40\left(\frac{1}{3}\right) + 36\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{1028}{30}$$

Άσκηση 6.

(α) Αν για πρώτη φορά επιλέξουμε μπλε μπάλα στο i -οστό στάδιο, στα προηγούμενα $(i - 1)$ στάδια επιλέξαμε κόκκινη μπάλα. Συνεπώς:

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4},$$

$$P(X = 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}, \dots$$

Γενικά, λοιπόν, ισχύει:

$$P(X = i) = \frac{1}{i(i+1)}, \quad i \geq 1$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned}
P(X > n) &= 1 - P(X \leq n) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Για $n \rightarrow \infty$ ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X > n) = 0$$

συνεπώς η μπλε μπάλα θα επιλεγεί τελικά με πιθανότητα 1.

(γ) Η μέση τιμή της X είναι:

$$E[X] = \sum_i i \cdot P[X = i] = \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{i(i+1)} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i+1} = \infty$$

Άσκηση 7.

(α)

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^3 p_{X,Y}(x, y), \quad x = 1, 2, 3$$

Από τον πίνακα τιμών της $p_{X,Y}(x, y)$ προκύπτει εύκολα ότι:

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/9, & x = 1 \\ 3/9, & x = 2 \\ 2/9, & x = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$E[X] = \sum_{x=1}^3 x \cdot p_X(x) = 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$$

(β) Ομοίως,

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^3 p_{X,Y}(x, y), \quad y = 1, 2, 3$$

Από τον πίνακα τιμών της $p_{X,Y}(x, y)$ προκύπτει εύκολα ότι:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2/9, & y = 1 \\ 3/9, & y = 2 \\ 4/9, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε πως:

$$E[Y] = \sum_{y=1}^3 y \cdot p_Y(y) = 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$$

(γ) Έχουμε ότι:

$$P_{Y|A}(y) = \frac{P(Y = y, A)}{P(A)}$$

όπου,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \leq 2) = \sum_{i=1}^2 p_X(x) \\ &= p_X(1) + p_X(2) \\ &= \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

- $\{Y = 1\} \cap \{X \leq 2\} = \{(1, 1), (2, 1)\}$. 'ρα,
 $P(Y = 1, A) = p_{X,Y}(1, 1) + p_{X,Y}(2, 1) = \frac{1}{9} + 0 = \frac{1}{9}$
- $\{Y = 2\} \cap \{X \leq 2\} = \{(1, 2), (2, 2)\}$. 'ρα,
 $P(Y = 2, A) = p_{X,Y}(1, 2) + p_{X,Y}(2, 2) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$
- $\{Y = 3\} \cap \{X \leq 2\} = \{(1, 3), (2, 3)\}$. 'ρα,
 $P(Y = 3, A) = p_{X,Y}(1, 3) + p_{X,Y}(2, 3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9}$

Άρα, θα είναι:

$$p_{Y|A}(y) = \begin{cases} 1/7, & y = 1 \\ 3/7, & y = 2 \\ 3/7, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$E[Y|A] = \sum_{y=1}^3 y \cdot p_{Y|A}(y) = 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{3}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{16}{7}$$

$$E[Y^2|A] = \sum_{y=1}^3 y^2 \cdot p_{Y|A}(y) = 1^2 \cdot \frac{1}{7} + 2^2 \cdot \frac{3}{7} + 3^2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{40}{7}$$

$$\text{var}(Y|A) = E[Y^2|A] - (E[Y|A])^2 = \frac{40}{7} - \left(\frac{16}{7}\right)^2 = \frac{24}{49} = 0.49$$

(δ) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E[Z] &= E[3 \cdot X + 2 \cdot Y + 7] \\ &= 3 \cdot E[X] + 2 \cdot E[Y] + 7 \\ &= 3 \cdot \frac{16}{9} + 2 \cdot \frac{20}{9} + 7 \\ &= \frac{151}{9} \\ &= 16.78 \end{aligned}$$

(ε) Καθώς οι $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, θα είναι:

$$p_{\tilde{X}, \tilde{Y}}(x, y) = p_{\tilde{X}}(x) \cdot p_{\tilde{Y}}(y), \quad x, y = 1, 2, 3.$$

όπου οι $p_{\tilde{X}}(x)$ και $p_{\tilde{Y}}(y)$ ακολουθούν τις εκφράσεις στα (α) και (β).

Οι τιμές της $p_{\tilde{X},\tilde{Y}}(x,y)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα :

	$\tilde{Y}=1$	$\tilde{Y}=2$	$\tilde{Y}=3$
$\tilde{X}=1$	$\frac{8}{81}$	$\frac{12}{81}$	$\frac{16}{81}$
$\tilde{X}=2$	$\frac{6}{81}$	$\frac{9}{81}$	$\frac{12}{81}$
$\tilde{X}=3$	$\frac{4}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{8}{81}$

Άσκηση 8. (α) Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $p_{N,K}(n,k) = p_{N|K}(n|k)p_K(k)$ για να υπολογίσουμε την από κοινού $\sigma.\pi.\pi$:

$$p_{N,K}(n,k) = \begin{cases} 1/(4k), & k = 1, 2, 3, 4 \text{ και } n = 1, \dots, k; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(β) Η $\sigma.\pi.\pi$ $p_N(n)$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο :

$$p_N(n) = \sum_k p_{N,K}(n,k) = \sum_{k=n}^4 \frac{1}{4k}$$

δηλαδή:

$$p_N(n) = \begin{cases} 25/48, & n = 1 \\ 13/48, & n = 2 \\ 7/48, & n = 3 \\ 3/48, & n = 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(γ) Η δεσμευμένη $\sigma.\pi.\pi$ είναι:

$$p_{K|N}(k|2) = \frac{p_{N,K}(2,k)}{p_N(2)} = \begin{cases} 6/13, & k = 2; \\ 4/13, & k = 3; \\ 3/13, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(δ) Έστω A το γεγονός ότι $2 \leq N \leq 3$. Πρώτα υπολογίζουμε την δεσμευμένη $\sigma.\pi.\pi$ του K δεδομένου του A :

$$p_{K|A}(k) = \frac{P(K=k, A)}{P(A)}$$

$$P(A) = p_N(2) + p_N(3) = 5/12$$

$$P(K=k, A) = \begin{cases} 1/8, & k = 2; \\ 1/12 + 1/12, & k = 3; \\ 1/16 + 1/16, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$p_{K|A}(k) = \begin{cases} 3/10, & k = 2; \\ 2/5, & k = 3; \\ 3/10, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επειδή η δεσμευμένη $\sigma.\pi.\pi$ του K δεδομένου του A είναι συμμετρική γύρω από το $k = 3$, γνωρίζουμε ότι $E[K|A] = 3$. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την δεσμευμένη διασπορά του K δεδομένου του A :

$$\text{var}(K|A) = E[(K - E[K|A])^2|A] = 3/10(2 - 3)^2 + 2/5(0) + 3/10(4 - 3)^2 = 3/5$$

(ε) Έστω C_i το κόστος ενός βιβλίου i και $E[C_i] = 3$. Έστω T το συνολικό κόστος, δηλαδή $T = C_1 + \dots + C_N$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το $E[T]$ ως εξής:

$$\begin{aligned} E[T] &= \sum_{i=1}^4 E[T|N=i]p_N(i) \\ &= E[C_i]p_N(1) + 2E[C_i]p_N(2) + 3E[C_i]p_N(3) + 4E[C_i]p_N(4) \\ &= 3(25/48) + 6(13/48) + 9(7/48) + 12(1/16) \\ &= 21/4 \end{aligned}$$