

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 2/11/2018

Ημερομηνία Παράδοσης: 15/11/2018

Άσκηση 1. Σε ένα τηλεπαιχνίδι, ο διαγωνιζόμενος καλείται να διαλέξει στην τύχη έναν αριθμό, από το 1 μέχρι το 6. Όταν αποφασίσει, εμφανίζεται ένας τροχός ο οποίος γυρίζει τρεις φορές, και σταματά κάθε φορά σε έναν από του έξι αυτούς αριθμούς. Αν ο αριθμός που στοιχημάτισε ο παίκτης εμφανιστεί x φορές, όπου $x = 1, 2, 3$, τότε ο παίκτης κερδίζει x βαθμούς. Εάν ο αριθμός δεν εμφανιστεί, τότε ο παίκτης χάνει έναν βαθμό. Έστω μια μεταβλητή A που δηλώνει τα κέρδη του διαγωνιζόμενου. Να βρεθεί εάν συμφαίρει κάποιον να πάρει μέρος στο τηλεπαιχνίδι.

Άσκηση 2. Έστω η τ.μ. X με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ):

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{c}, & \text{αν } x = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α') Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c .

(β') Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X]$ της τ.μ. X

(γ') Ορίζουμε τη νέα τ.μ. $Z = (X - E[X])^2$. Υπολογίστε τη ΣΠΠ $p_Z(z)$ της τ.μ. Z .

(δ') Χρησιμοποιώντας το (γ), υπολογίστε τη διασπορά $var(X)$ της τ.μ. X .

(ε') Υπολογίστε τη διασπορά της τ.μ. X χρησιμοποιώντας τον τύπο: $var(X) = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x)$.

Άσκηση 3. Σε ένα εργαστήριο έχουν σε μικρή ποσότητα ένα ραδιενεργό υλικό που, υπό κατάλληλες συνθήκες, παράγει σωματίδια δ . Έστω ένα πείραμα στο οποίο μετράμε πόσα σωματίδια δ παράγει ένα γραμμάριο του υλικού για χρονικό διάστημα ενός δευτερολέπτου. Παλαιότερες μετρήσεις δείχνουν ότι κατά μέσον όρο παράγονται 3.2 τέτοια σωματίδια. Να βρεθεί η πιθανότητα να μη παραχθούν περισσότερα από 2 σωματίδια δ σε 1 δευτερόλεπτο.

Άσκηση 4. Παρακολουθείτε ένα βίντεο για διακριτές τυχαίες μεταβλητές στο *YouTube*, το οποίο περιέχει 30 καρέ το δευτερόλεπτο. Κάθε καρέ αποτελείται από 1000 πακέτα. Κάθε φορά που ένα καρέ αναπαράγεται στον υπολογιστή σας, αν 5 ή περισσότερα πακέτα αυτού του καρέ έχουν χαθεί (δηλαδή έχετε λάβει 995 ή λιγότερα πακέτα του καρέ), παρατηρείτε το λεγόμενο φαινόμενο του *buffering* (καθυστερήση στην αναπαραγωγή του βίντεο). Κάθε πακέτο χάνεται με πιθανότητα p , ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα.

(α) Έστω ότι $p = 0.001$. Υπολογίστε την πιθανότητα να παρατηρήσετε *buffering*.

(β) Υπολογίστε ξανά την παραπάνω πιθανότητα χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της *Poisson* κατανομής.

Άσκηση 5. Απαντήστε στα παρακάτω:

(α) Ρίχνουμε ένα δίκαιο ζάρι μία φορά και έστω X το αποτέλεσμα της ρίψης. Να υπολογιστεί το $E[X]$ και το $Var(X)$.

(β) Έστω X μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει την τιμή -1 με πιθανότητα $P\{X = -1\} = 0.2$, την τιμή 1 με πιθανότητα $P\{X = 1\} = 0.3$ και την τιμή 0 με πιθανότητα $P\{X = 0\} = 0.5$. Να υπολογιστεί το $E[X^2]$.

(γ) Βρίσκεστε σε μια διάλεξη του μαθήματος HY-217 και κρατάτε σημειώσεις. Στο τέλος του μαθήματος ο καθηγητής πάει να οθήσει τον πίνακα, οπότε για να προλάβετε, γράφετε βιαστικά την τελευταία σελίδα, με αποτέλεσμα να κάνετε ορθογραφικά λάθη. Έστω ότι ο αριθμός των λαθών είναι μια *Poisson* τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένα λάθος στην τελευταία σελίδα.

(δ) Ένα σχολείο με 120 μαθητές πηγαίνει μια εκδρομή, για την οποία χρειάστηκαν 3 λεωφορεία. Επειδή τα λεωφορεία δεν είχαν το ίδιο μέγεθος, η κατανομή των παιδιών έχει ως εξής: Το πρώτο λεωφορείο θα πάρει 44 άτομα, το δεύτερο 36 και το τρίτο 40. Έστω ότι διαλέγουμε στην τύχη έναν μαθητή και έστω X ο αριθμός των μαθητών που είναι στο λεωφορείο του. Να βρεθεί η $E[X]$.

Άσκηση 6. Ένα δοχείο περιέχει αρχικά μία κόκκινη μπάλα και μία μπλε μπάλα. Σε κάθε στάδιο του πειράματος, επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα από το δοχείο και την επανατοποθετούμε μέσα στο δοχείο μαζί με ακόμα μία μπάλα του ίδιου χρώματος. Δηλαδή, αν την πρώτη φορά επιλέξουμε την κόκκινη μπάλα, τότε αυτή τοποθετείται πάλι στο δοχείο μαζί με άλλη μία κόκκινη μπάλα, οπότε το δοχείο περιέχει 2 κόκκινες και μία μπλε. Έστω X το πλήθος των σταδίων έως την επιλογή της μπλε μπάλας. Π.χ. αν στο πρώτο στάδιο επιλέθηκε κόκκινη μπάλα και στο δεύτερο στάδιο μπλε, τότε $X = 2$.

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας, $p_X(i)$, της τ.μ. X .

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > n)$, όπου n φυσικός αριθμός, και δείξτε ότι η πιθανότητα του γεγονότος να επιλεγεί τελικά η μπλε μπάλα είναι 1.

(γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της X . Με άλλα λόγια, πόσα στάδια (πόσος χρόνος) θα χρειαστούν κατά μέσο όρο για να επιλεγεί η μπλε μπάλα.

Άσκηση 7. Θεωρείστε τις δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	1/9	2/9	1/9
$X = 2$	0	1/9	2/9
$X = 3$	1/9	0	1/9

(α) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_X(x)$ της τ.μ. X . Υπολογίστε την μέση τιμή της X , $E[X]$.

(β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_Y(y)$ της τ.μ. Y . Υπολογίστε την μέση τιμή της Y , $E[Y]$.

(γ) Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.π. της τ.μ. Y , $p_{Y/A}(y)$, δεδομένου του γεγονότος $A = \{X \leq 2\}$. Ποια είναι η μέση τιμή, δεύτερη ροπή, και διασπορά της τ.μ. Y δεδομένου του A , δηλαδή ποια είναι τα $E[Y/A]$, $E[Y^2/A]$, και $var(Y/A)$, αντίστοιχα;

(δ) Εστω η τ.μ. $Z = g(X, Y) = 3X + 2Y + 7$. Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ. Z .

(ε) Εστω η τ.μ. $\tilde{X}$ με την ίδια σ.π. όπως η τ.μ. X και η τ.μ. $\tilde{Y}$ με την ίδια σ.π. όπως η τ.μ. Y . Έστω ότι οι τ.μ. $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ είναι ανεξάρτητες. Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$.

Άσκηση 8. Ο Χρήστος αφιερώνει K ώρες στην αγορά βιβλίων, όπου K μια διακριτή τ.μ με ισοπίθανες τιμές 1, 2, 3 και 4. Ο αριθμός N των βιβλίων που αγοράζει ο Χρήστος είναι και αυτός μια διακριτή τ.μ που εξαρτάται από το πόση ώρα ψωνίζει. Άρα :

$$p_{N/K}(n/k) = \frac{1}{k}, \text{ για } n = 1, \dots, k.$$

(α) Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των K και N .

(β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. της N .

(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. της K δεδομένου του γεγονότος $N = 2$.

(δ) Μας δίδεται ότι ο Χρήστος αγόρασε τουλάχιστον 2 αλλά όχι περισσότερα από 3 βιβλία. Υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της K , δεδομένης της παραπάνω πληροφορίας.

(ε) Το κόστος κάθε βιβλίου είναι τ.μ. με μέση τιμή ίση με 3 ευρώ. Υπολογίστε τη μέση τιμή του ποσού το οποίο ο Χρήστος ξόδεψε συνολικά σε βιβλία. Υπόδειξη: Δεσμεύστε ως προς τα γεγονότα $N = 1, \dots, N = 4$ και χρησιμοποιήστε το θεώρημα ολικής μέσης τιμής.