

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

- (i) Ορίζουμε το γεγονός: $A = \{\text{Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους}\}$.

Συνολικά υπάρχουν $\binom{52}{7}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 7 φύλλα από μια τράπουλα 52 φύλλων.

Ας μετρήσουμε πόσοι από τους συνδυασμούς αυτούς περιέχουν ακριβώς 3 άσσους.

Παρατήρηση: Το σκεπτικό είναι ότι χωρίζουμε το αρχικό σύνολο σε υποσύνολα, και μετράμε τους συνδυασμούς μέσα σε αυτά.

Πιο συγκεκριμένα, εδώ έχουμε ένα υποσύνολο που περιέχει τους 4 άσσους, και άλλο ένα που περιέχει τα υπόλοιπα 48 φύλλα τα οποία δεν είναι άσσοι, εκ των συνολικά 52 φύλλων.

Υπάρχουν λοιπόν δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 3 από τους 4 άσσους, και δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε τα υπόλοιπα 4 φύλλα από τα 48 φύλλα της τράπουλας που έχουν απομείνει. Συνεπώς, υπάρχουν δυνατοί συνδυασμοί να τραβήξουμε 7 φύλλα που να περιέχουν ακριβώς 3 άσσους.

Για να βρούμε την πιθανότητα ότι στα 7 φύλλα περιέχονται 3 άσσοι, διαιρούμε αυτόν τον αριθμό με το συνολικό πλήθος των δυνατών συνδυασμών να διαλέξουμε 7 φύλλα από μια τράπουλα των 52 φύλλων, και τελικά έχουμε:

$$p_1 = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{4}}{\binom{52}{7}} = \frac{4 \cdot 194580}{133784560} = \frac{778320}{133784560} = 0.0058.$$

- (ii) Με ανάλογο συλλογισμό όπως παραπάνω, υπάρχουν $\binom{4}{2}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 2 από τους 4 βαλέδες, και $\binom{48}{5}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε τα υπόλοιπα 5 φύλλα από τα 48 φύλλα της τράπουλας που έχουν απομείνει.

Συνεπώς, υπάρχουν $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{5}$ δυνατοί συνδυασμοί να τραβήξουμε 7 φύλλα, που να περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες.

Η πιθανότητα στα 7 φύλλα να περιέχονται 2 βαλέδες είναι τελικά:

$$p_2 = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{5}}{\binom{52}{7}} = \frac{6 \cdot 1712304}{133784560} = \frac{10273824}{133784560} = 0.0768.$$

- (iii) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$A = \{\text{Τραβήξαμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 3 άσσους}\}$

$B = \{\text{Τραβήξαμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες}\}$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η πιθανότητα της ένωσης: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ είναι γνωστές, από τα προηγούμενα ερωτήματα, άρα πρέπει να βρούμε την πιθανότητα $P(A \cap B)$. Το γεγονός $(A \cap B)$ συμβαίνει με την επιλογή 3 από τους 4 άσσους, 2 από τους 4 βαλέδες, και 2 από τα υπόλοιπα 44 φύλλα.

Συνολικά λοιπόν, υπάρχουν $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{2}$ δυνατοί τρόποι για να επιλέξουμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 3 άσσους και 2 βαλέδες. Άρα, η πιθανότητα $P(A \cap B)$ θα είναι:

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{2}}{\binom{52}{7}} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 946}{133784560} = \frac{22704}{133784560} = 1.6971 \times 10^{-4}$$

Τελικά, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$p_3 = p_1 + p_2 - P(A \cap B) = 0.0058 + 0.0768 - 1.6971 \times 10^{-4} = 0.0828.$$

Άσκηση 2.

- (i) Ο τύπος για τους ανασυνδυασμούς n αντικειμένων εκ των οποίων υπάρχουν k_1 αντικείμενα τύπου 1, k_2 αντικείμενα τύπου 2, $\dots$, k_m αντικείμενα τύπου m είναι:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdots k_m!}.$$

Με βάση αυτόν τον τύπο, η λύση του προβλήματος έχει ως εξής:

(α) Με την λέξη ΚΡΙΜΑ μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot \dots \cdot 1!} = 5! = 120$$

αναγραμματισμούς, αφού κανένα γράμμα δεν εμφανίζεται παραπάνω από 1 φορά.

(β) Με την λέξη ΚΑΛΗΜΕΡΑ μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{8!}{2!} = \frac{40320}{2} = 20160$$

αναγραμματισμούς, αφού το γράμμα "Α" εμφανίζεται 2 φορές, και τα υπόλοιπα γράμματα από 1 φορά.

(γ) Με την λέξη ΠΑΠΑΚΙ μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{720}{4} = 180$$

αναγραμματισμούς, αφού τα γράμματα "Π" και "Α" εμφανίζονται 2 φορές, και τα υπόλοιπα γράμματα από 1 φορά.

(δ) Με την λέξη ΑΓΓΑΡΕΙΑ μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{40320}{12} = 3360$$

αναγραμματισμούς, αφού το γράμμα "Α" εμφανίζεται 3 φορές, το γράμμα "Γ" εμφανίζεται 2 φορές, και τα υπόλοιπα γράμματα από 1 φορά.

- (ii) Εδώ απλά θέλουμε να μοιράσουμε 9 αντικείμενα (τα 9 παιχνίδια) σε τρεις κατηγορίες των τεσσάρων, τριών και δύο. Συνεπώς υπάρχουν:

$$\binom{9}{4, 3, 2} = \frac{9!}{4!3!2!} = 1260$$

διαφορετικοί τρόποι για να γίνει κάτι τέτοιο.

Παρατήρηση: Εναλλακτικά, αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε έναν έτοιμο τύπο, σκεφτόμαστε ως εξής:

Η πρώτη νίκη μπορεί να εμφανιστεί σε οποιονδήποτε από 9 αγώνες, η δεύτερη σε οποιονδήποτε από 8, κ.ο.κ., και για τα 9 αποτελέσματα, λαμβάνοντας τελικά 9! δυνατά αποτελέσματα.

Παρατηρήστε ότι οι νίκες εμφανίζονται με 4! διαφορετικές σειρές, οι ισοπαλίες με 3! διαφορετικές σειρές, και οι ήττες με 2! διαφορετικές σειρές.

Για κάθε μία συγκεκριμένη ακολουθία αποτελεσμάτων όπου οι νίκες/ισοπαλίες/ήττες δεν είναι διακριτές, υπάρχουν $4! \cdot 3! \cdot 2!$ ακολουθίες όπου οι νίκες/ισοπαλίες/ήττες δεν είναι διακριτές.

Άρα, αν X είναι ο ζητούμενος αριθμός, θα πρέπει:

$$X \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 9! \Rightarrow X = \frac{9!}{4!3!2!} = 1260.$$

Άσκηση 3. Εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η σειρά, θα πρέπει κατευθείαν να σκεφτούμε ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε συνδυασμούς για να βρούμε το ζητούμενο.

Έστω ότι έχουμε 4 τάξεις των 25 φοιτητών, τις Α, Β, Γ, Δ. Τότε, η πιθανότητα να βρίσκονται ο Κώστας και η Ελένη μαζί σε μία συγκεκριμένη τάξη θα είναι:

$$p_4 = \frac{\text{Πλήθος συνδυασμών που περιέχουν τον Κώστα και την Ελένη-π.χ. στην τάξη Α}}{\text{Συνολικό πλήθος συνδυασμών 100 φοιτητών σε τάξεις των 25 φοιτητών}}$$

Παρατήρηση: Σε τέτοιου είδους ασκήσεις, αρχικά σκεφτόμαστε τις περιπτώσεις να πραγματοποιηθεί το ζητούμενο ενδεχόμενο, και στη συνέχεια ζωρίζουμε το αρχικό σύνολο σε υποσύνολα, στα οποία μετράμε το πλήθος των συνδυασμών.

Εν προκειμένω, χωρίζουμε το αρχικό σύνολο σε ένα υποσύνολο που περιέχει τον Κώστα και την Ελένη, και σε ένα άλλο υποσύνολο που περιέχει τους υπόλοιπους 98 φοιτητές.

Για να συμπληρωθεί η τάξη των 25 φοιτητών, από το πρώτο σύνολο διαλέγουμε και τους 2, ενώ από δεύτερο υποσύνολο διαλέγουμε τους υπόλοιπους 23. Η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι:

$$\frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{98}{23}}{\binom{100}{25}}$$

Καθώς υπάρχουν συνολικά 4 διαφορετικές τάξεις (Α, Β, Γ, Δ), η πιθανότητα να βρίσκονται ο Κώστας και η Ελένη μαζί σε κάποια από αυτές θα είναι:

$$p_5 = 4 \cdot \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{98}{23}}{\binom{100}{25}} = 4 \cdot \frac{1 \cdot 1.4698 \times 10^{22}}{2.4252 \times 10^{23}} = \frac{5.8793 \times 10^{22}}{2.4252 \times 10^{23}} = 0.2424.$$

Παρατήρηση: Εναλλακτικά, τοποθετούμε τον Κώστα σε μία συγκεκριμένη τάξη με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ (όλες οι τάξεις θεωρούνται ισοπίθανες).

Για την Ελένη υπάρχουν 99 πιθανές τοποθετήσεις, από τις οποίες μόνο οι 24 την βάζουν στην ίδια τάξη με τον Κώστα.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα να (να μπουν μαζί σε οποιαδήποτε τάξη) θα είναι:

$$p_5 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{99} = \frac{24}{99} = 0.2424.$$

Άσκηση 4. Χωρίζουμε το αρχικό σύνολο σε ένα υποσύνολο που περιέχει τα 4 φύλλα της Αλίκης, και σε ένα άλλο που περιέχει τα υπόλοιπα 48 φύλλα της τράπουλας.

Για να κερδίσει η Αλίκη θα πρέπει ο Βασίλης να επιλέξει και τα 4 φύλλα από το πρώτο σύνολο.

Εφόσον τα 4 φύλλα της Αλίκης είναι συγκεκριμένα, ο Βασίλης πρέπει να διαλέξει επιπλέον 4 οποιαδήποτε φύλλα από το δεύτερο σύνολο.

Συνεπώς, το συνολικό πλήθος των δυνατών συνδυασμών φύλλων του Βασιλή στους οποίους περιλαμβάνονται τα 4 φύλλα της Αλίκης είναι: $\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{4}$.

Το συνολικό πλήθος των τρόπων με τους οποίους ο Βασίλης μπορεί να διαλέξει οποιαδήποτε 8 από τα συνολικά 52 φύλλα της τράπουλας είναι: $\binom{52}{8}$.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι τελικά:

$$p_6 = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{4}}{\binom{52}{8}} = \frac{1 \cdot 194580}{270725} = \frac{194580}{270725} = 0.7187$$

Άσκηση 5.

- (i) Ο δειγματοχώρος του πειράματος αποτελείται από 9 ισοπίθανα ζευγάρια (i, j) με $i, j = 1, 2, 3$. Για κάθε τιμή της Τ.Μ. X ($0, \pm 1, \pm 2$), υπολογίζουμε το πλήθος των αποτελεσμάτων που δίνουν διαφορά που ισούται με τη αντίστοιχη τιμή της Τ.Μ. X . Για παράδειγμα, το γεγονός $\{X = 0\}$ προκύπτει όταν έρθουν οι 3 διπλές $(1, 1)$, $(2, 2)$, και $(3, 3)$.

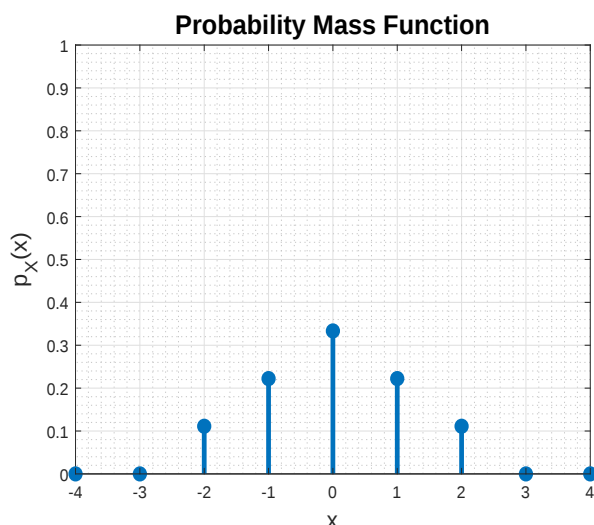
Καταμετρούμε τον αριθμό των *ευνοϊκών* περιπτώσεων για κάθε ενδεχόμενο (τιμή της Τ.Μ. X) προς εκείνον των συνολικών πιθανών περιπτώσεων. Εύκολα προκύπτει τότε ότι η ζητούμενη Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/9 & x = -2, 2 \\ 2/9 & x = -1, 1 \\ 3/9 & x = 0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η $p_X(x)$ είναι μία *έγκυρη* Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας), καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\sum_{x=-2}^2 p_X(x) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

Η γραφική της παράσταση (*περιορισμένη* στο διάστημα $[-4, 4]$) φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) $p_X(x)$.

(ii) Έστω $Y = X^2$. Εύκολα προκύπτει ότι η Y παίρνει τις τιμές 0, 1, 4.

Επίσης, $\{Y = 0\} \leftrightarrow \{X = 0\}$, $\{Y = 1\} \leftrightarrow \{X = -1\} \cup \{X = 1\}$ και $\{Y = 4\} \leftrightarrow \{X = -2\} \cup \{X = 2\}$.

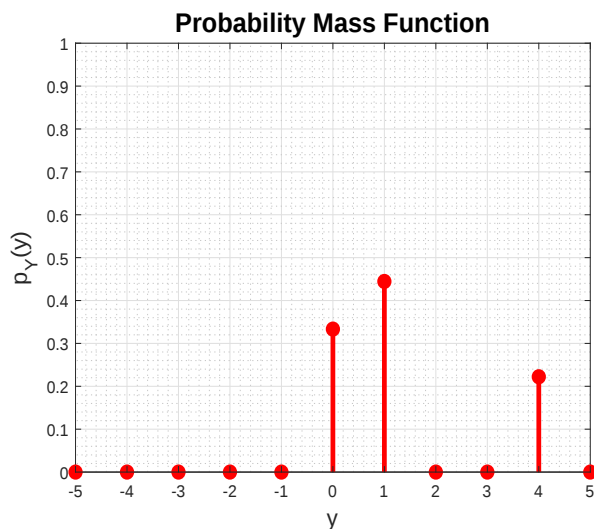
Ταιριάζοντας τις δυνατές τιμές του X και τις πιθανότητες τους με τις πιθανές τιμές του Y έχουμε:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2/9 & y = 4 \\ 4/9 & y = 1 \\ 3/9 & y = 0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η $p_Y(y)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας), καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\sum_{y=0, y \neq 3}^4 p_Y(y) = \frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 1$$

Η γραφική της παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$) φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) $p_Y(y)$.

Άσκηση 6.

- (i) Αρχικά παρατηρούμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αποτελείται από $|\Omega| = \binom{15}{5}$ στοιχεία.

Αναφορικά με το πεδίο τιμών της τ.μ. X , S_X , δεδομένης της αρίθμησης με βάση την "αρχαιότητα στην βουλή" καθώς και του γεγονότος ότι ο πρόεδρος θα είναι ο αρχαιότερος της σχηματιζόμενης υποεπιτροπής, έχουμε: $S_X = \{5, 6, \dots, 15\}$.

Σχετικά με την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X παρατηρούμε ότι $X = x$, όπου $x = 5, 6, \dots, 15$ αν και μόνο αν επιλεγούν για την υποεπιτροπή το άτομο x και άλλα 4 άτομα αποκλειστικά στα πρώτα $x - 1$. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{x-1}{4}$ τρόπους.

Ως εκ τούτου, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X θα είναι:

$$p_X(x) = P(X = x) = \frac{\binom{x-1}{4}}{\binom{15}{5}}, x = 5, 6, \dots, 15.$$

- (ii) Αναφορικά με το πεδίο τιμών της τ.μ. Y , S_Y , δεδομένης της αρίθμησης με βάση την "αρχαιότητα στην βουλή" καθώς και του γεγονότος ότι ο γραμματέας θα είναι ο δεύτερος αρχαιότερος της σχηματιζόμενης υποεπιτροπής (μετά τον πρόεδρό της), έχουμε: $S_Y = \{4, 5, \dots, 14\}$.

Σχετικά με την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y παρατηρούμε ότι $Y = y$, όπου $y = 4, 5, \dots, 14$ αν και μόνο αν επιλεγούν για την υποεπιτροπή κάποιο από τα άτομα $y + 1, y + 2, \dots, 15$, το άτομο y και άλλα 3 άτομα αποκλειστικά στα πρώτα $y - 1$. Αυτό μπορεί να γίνει με $(15 - y) \cdot \binom{y-1}{3}$ τρόπους.

Ως εκ τούτου, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y θα είναι:

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \frac{(15 - y) \cdot \binom{y-1}{3}}{\binom{15}{5}}, y = 4, 5, \dots, 14.$$

Άσκηση 7.

- (i) Το ζάρι είναι δίκαιο, οπότε κάθε αριθμός έχει την ίδια πιθανότητα να εμφανιστεί, ίση με $\frac{1}{6}$. Συνεπώς, έχουμε:

$$p_X(8) = P(X = 8) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

$$p_X(5) = P(X = 5) = P(\{2, 3\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$p_X(-z) = P(X = -z) = P(\{4, 5, 6\}) = P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

Παρατήρηση: Η $p_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας), καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\sum_x p_X(x) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = 1$$

- (ii) Με βάση τον ορισμό της Μέσης Τιμής, έχουμε:

$$\mu_X = -1 \Rightarrow \sum_x x p_X(x) = -1 \Rightarrow 8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + 5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) - z \cdot \left(\frac{3}{6}\right) = -1 \Rightarrow \frac{18 - 3z}{6} = -1 \Rightarrow z = 8.$$