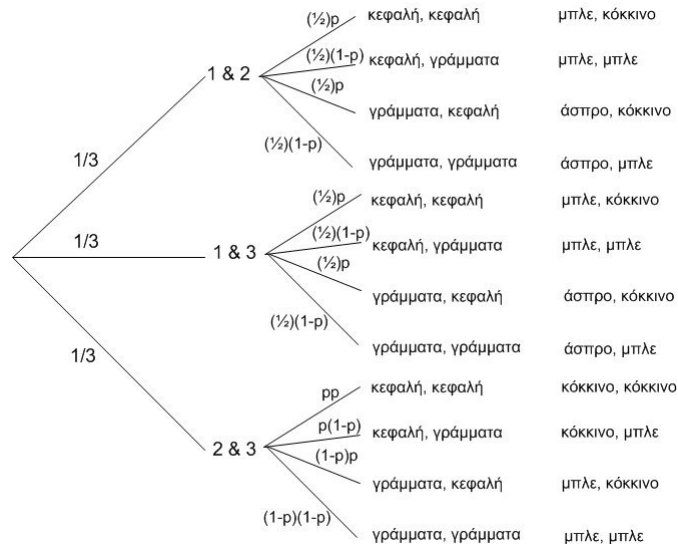


**ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2018**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

**Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων**

**Άσκηση 1.** (α) Το πείραμα θεωρούμε ότι γίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση γίνεται η επιλογή των δύο κερμάτων, ενώ στη δεύτερη φάση γίνεται το ρίξιμο. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η επιλογή δύο κερμάτων από ένα σύνολο τριών: επιλέγουμε το πρώτο και το δεύτερο ή το πρώτο και το τρίτο ή το δεύτερο και το τρίτο. Καθένα από αυτά τα ζευγάρια έχει την ίδια πιθανότητα επιλογής. Επίσης, για κάθε ζευγάρι κερμάτων υπάρχουν τα εξής ενδεχόμενα ρίψεων: (κεφαλή, κεφαλή), (κεφαλή, γράμματα), (γράμματα, κεφαλή), (γράμματα, γράμματα). Άρα ο δειγματοχώρος μπορεί να περιγραφεί όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Δενδρική αναπαράσταση του πειράματος.

(β) Η πιθανότητα και οι δύο πλευρές που έρχονται μετά τη ρίψη των δύο κερμάτων να είναι βαμμένες με το ίδιο χρώμα είναι:

$$\begin{aligned} P(\text{πλευρές με ίδιο χρώμα}) &= P((\text{μπλε}, \text{μπλε})) + P((\text{κόκκινο}, \text{κόκκινο})) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}(1-p) + p^2 + (1-p)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{3}(2p^2 - 3p + 2) \end{aligned}$$

Όμως,  $P(\text{πλευρές με ίδιο χρώμα}) = 29/96$ .

Λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση  $(1/3)(2p^2 - 3p + 2) = 29/96$ , βρίσκουμε ότι  $p = 5/8$  ή  $p = 7/8$ .

**Άσκηση 2.** Έστω  $X$  το γεγονός ένας ασθενής να έχει μολυνθεί από τον Α και  $\Psi$  να έχει μολυνθεί από τον Β. Οπότε:

(α) Η πιθανότητα που μας ζητείται να υπολογίσουμε είναι η  $P(X \cup \Psi)$ , άρα

$$P(X \cup \Psi) = 1 - P(X^c \Psi^c) = 1 - 0.6 = 0.4$$

(β) Η πιθανότητα που μας ζητείται να υπολογίσουμε είναι η  $P(X\Psi)$ . Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ , άρα από την εξίσωση του (α) προκύπτει ότι:

$$P(X \cup \Psi) = P(X) + P(Y) - P(XY) \Leftrightarrow 0.4 = 0.2 + 0.3 - P(XY) \Leftrightarrow P(XY) = 0.1$$

**Άσκηση 3.** Προσδιορίζουμε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων ως εξής:

$$\alpha = P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\})$$

$$\beta = P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\})$$

Οι έδρες του ζαριού με περιττό αριθμό έχουν διπλάσια πιθανότητα εμφάνισης από τις έδρες με άρτιο αριθμό. Επομένως:

$$\alpha = 2 \cdot \beta$$

Σύμφωνα με τα αξιώματα της Προσθετικότητας και της Κανονικοποίησης θα έχουμε ότι:

$$1 = 3\alpha + 3\beta \Leftrightarrow 1 = 3 \cdot (2\beta) + 3\beta \Leftrightarrow 1 = 6\beta + 3\beta \Leftrightarrow 1 = 9\beta \Leftrightarrow \beta = 1/9$$

Επομένως,  $\alpha = 2/9$ , και η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(\{5, 6\}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

**Άσκηση 4.** Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$X = \{ \text{Η μπάλα μπαίνει στο καλάθι} \}$  και  $\Psi = \{ \text{Η μπάλα δεν μπαίνει στο καλάθι} \}$

Ο δειγματοχώρος του πειράματος μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$\Omega = \{ \Psi\Psi\Psi \dots \Psi\Psi\Psi \dots X, \Psi X, \Psi\Psi X, \Psi\Psi\Psi X, \Psi\Psi\Psi\Psi X, \dots \}$$

(α) Το ενδεχόμενο να κερδίσει ο Μάνος είναι:  $M = \{ X, \Psi\Psi\Psi X, \Psi\Psi\Psi\Psi\Psi X, \dots \}$

(β) Το ενδεχόμενο να κερδίσει ο Νίκος είναι:  $N = \{ \Psi X, \Psi\Psi\Psi\Psi X, \Psi\Psi\Psi\Psi\Psi\Psi X, \dots \}$

(γ) Το ενδεχόμενο  $(M \cup N)^c$  μπορεί να σημαίνει ότι κερδίζει ο Γιάννης, μπορεί όμως να σημαίνει ότι δεν κερδίζει κανένας. Οπότε:

$$(M \cup N)^c = \{ \Psi\Psi\Psi \dots \Psi\Psi\Psi \dots, \Psi\Psi X, \Psi\Psi\Psi\Psi\Psi X, \dots \}$$

**Άσκηση 5.** (α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος περιγράφεται ως:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

όπου ο πρώτος αριθμός κάθε διατεταγμένου ζεύγους στο  $\Omega$  αντικατοπτρίζει το αποτέλεσμα της πρώτης επιλογής από το καπέλο, ενώ ο δεύτερος το αποτέλεσμα της δεύτερης επιλογής, μετά από την επανατοποθέτηση της κάρτας.

(β)  $E = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$  είναι το ζητούμενο γεγονός του να επιλεγούν δύο κάρτες με αριθμούς των οποίων το άθροισμα να είναι ίσο με 4.

(γ)  $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

**Άσκηση 6.** (α) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου  $T-X$ . Γνωρίζουμε ότι:

$$P(T \cup X) = 1 \Leftrightarrow P(X) + P(T) - P(X \cap T) = 1 \Leftrightarrow P(X \cap T) = \frac{340}{400} + \frac{240}{400} - 1 \Leftrightarrow P(X \cap T) = \frac{9}{20}$$

Άρα:

$$P(T - X) = P(T) - P(X \cap T) = \frac{340}{400} - \frac{9}{20} = \frac{2}{5}$$

(β) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου  $(T-X) \cup (X-T)$ . Οπότε:

$$P[(T - X) \cup (X - T)] = P(X) - P(X \cap T) + P(T) - P(X \cap T) = P(X) + P(T) - 2P(X \cap T) = \frac{11}{20}$$