ΘΕΜΑ 1ο

- A, B: ξένα μεταξύ τους $\Rightarrow P(A\cap B)=0$
- A, C: ανεξάρτητα $\Rightarrow P(A\cap C) = P(A)\cdot P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Επίσης, $P(B\cap C) = P(C)\cdot P(B|C) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

Έχουμε τώρα:

(α) $P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$

$= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-0-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+0 = \frac{11}{12} = \underline{0.9167}$

(β) $P(AB\cup BC\cup CA) = P(AB)+P(BC)+P(CA) - 3P(ABC) + P(ABC) = 0+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-3\cdot 0+0 = \frac{3}{6} = \underline{0.5}$ $\square$

$[\,AB \equiv A\cap B\,]$

ΘΕΜΑ 2ο

(α) Υπάρχουν $\binom{4+6+8}{2} = \binom{18}{2} = \frac{18!}{2!\,16!} = 153$ συνολικά τρόποι με τους οποίους μπορώ να επιλέξω 2 κάλτσες από το συρτάρι. Από αυτούς, με $\binom{4}{2}=6$ τρόπους επιλέγω 2 κόκκινες και με $\binom{6}{2}=15$ τρόπους επιλέγω 2 μαύρες, με $\binom{8}{2}=28$ τρόπους επιλέγω 2 κίτρινες. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{6+15+28}{153} = \frac{49}{153} = \underline{0.32}$

(β) $G = \{$οι δύο κάλτσες είναι κίτρινες$\}$

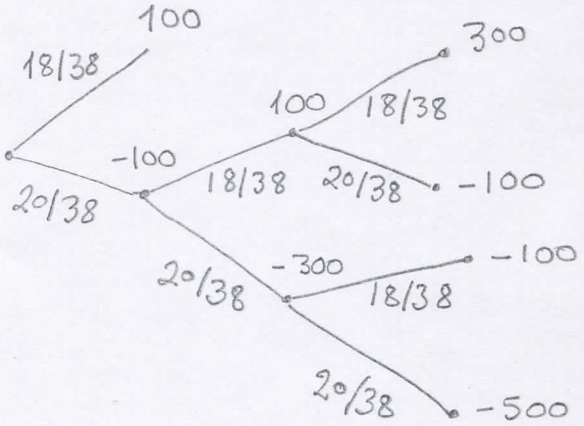
$F = \{$οι δυο κάλτσες έχουν το ίδιο χρώμα$\}$.

Από το (α), $P(F) = \frac{49}{153}$.

$$P(G|F) = \frac{P(G\cap F)}{P(F)} = \frac{P(G)}{P(F)} = \frac{28/153}{49/153} = \frac{28}{49} = \frac{4}{7} = \underline{0.5714}$$ $\square$

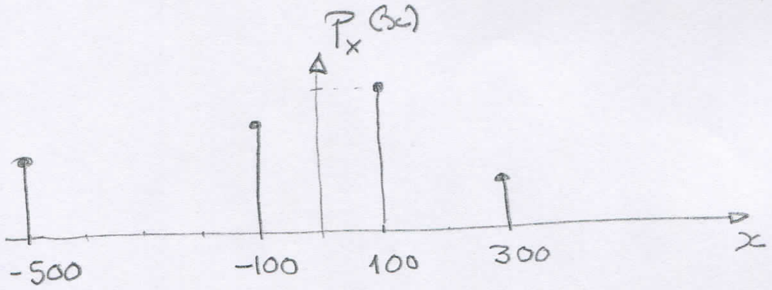
ΘΕΜΑ 3ο

(α) Το δενδρικό διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα:



Από το διάγραμμα εύκολα προκύπτει η σ.π. της τ.μ. X:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{18}{38} = 0.4737 & x = 100 \\ \frac{20}{38}\left(\frac{18}{38}\right)^2 = 0.1181 & x = 300 \\ 2\left(\frac{20}{38}\right)^2 \frac{18}{38} = 0.2624 & x = -100 \\ \left(\frac{20}{38}\right)^3 = 0.1458 & x = -500 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



(β) $P(X>0) = P_X(100) + P_X(300) = 0.4737 + 0.1181 = \underline{0.5918}$

(γ) $E[X] = 100 \times 0.4737 + 300 \times 0.1181 - 100 \times 0.2624 - 500 \times 0.1458$

$= -16.34$

Έστω και αν η πιθανότητα να φύγετε με κέρδος είναι σχεδόν 60%, κατά μέσο όρο χάνετε ~16\$. □

ΘΕΜΑ 4º

(α) Το πλήθος των παιχνιδιών τα οποία κερδίζουν οι Bucks στους 4 πρώτους αγώνες ακολουθεί διωνυμική κατανομή $\Delta(n=4, p)$. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\binom{4}{2} p^2 (1-p)^{4-2} = \underline{\underline{6p^2(1-p)^2}}$$

(β) Το πλήθος των παιχνιδιών που κερδίζουν οι Warriors στους 4 πρώτους αγώνες ακολουθεί διωνυμική $\Delta(n=4, 1-p)$. Συνεπώς, έχει μέση τιμή $\underline{\underline{4(1-p)}}$.

(γ) Ονομάζουμε $W_B = \{$οι Bucks κερδίζουν τους τελικούς$\}$. Το γεγονός $\{G=6\} \cap W_B$ συμβαίνει όταν $A = \{$οι Bucks κερδίζουν τα 3 από τα 5 πρώτα παιχνίδια της σειράς$\}$ ΚΑΙ $B = \{$Bucks κερδίζουν το έκτο παιχνίδι$\}$. Επομένως, λόγω ανεξαρτησίας έχουμε:

$$P(\{G=6 \cap W_B\}) = \underbrace{\left[\binom{5}{3} p^3 (1-p)^{5-3}\right]}_{P(A)} \cdot \underbrace{p}_{P(B)}$$

$$= \binom{5}{3} p^4 (1-p)^2$$

Ομοίως για τους Warriors:

$$P(\{G=6 \cap W_W\}) = \left[\binom{5}{3}(1-p)^3 p^{5-3}\right](1-p)$$

$$= \binom{5}{3}(1-p)^4 p^2$$

(δ) Προφανώς το πεδίο τιμών της τ.μ. G είναι το $\{4,5,6,7\}$.

Έχουμε ότι: $p_G(n) = P(G=n) = P(G=n \cap \Omega) = P(\{G=n\} \cap \{W_B \cup W_W\})$

$$= P(G=n \cap W_B) + P(G=n \cap W_W) \quad (\text{θοπ!})$$

$$= \left[\binom{n-1}{3} p^3 (1-p)^{n-1-3}\right] p + \left[\binom{n-1}{3}(1-p)^3 p^{n-1-3}\right](1-p)$$

$$\therefore \quad \underline{p_G(n) = \binom{n-1}{3} p^4 (1-p)^{n-4} + \binom{n-1}{3}(1-p)^4 p^{n-4}; \quad n=4,5,6,7}$$

□

ΘΕΜΑ 5º

(α) $\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} P_{X,Y}(x,y) = 1 \Rightarrow 45c = 1 \Rightarrow c = 1/45$

(β)

$$P_X(x) = \sum_{y=1}^{3} P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3+4+5}{45} = \frac{4}{15} & x=1 \\ \frac{4+5+6}{45} = \frac{1}{3} & x=2 \\ \frac{5+6+7}{45} = \frac{2}{5} & x=3 \end{cases}$$

$$P_Y(y) = \sum_{x=1}^{3} P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4/15 & y=1 \\ 1/3 & y=2 \\ 2/5 & y=3 \end{cases}$$

(ίδια κατανομή με την τ.μ. X λόγω συμμετρίας της $P_{X,Y}(x,y)$: $P_{X,Y}(\alpha,\beta) = P_{X,Y}(\beta,\alpha)$.)

(γ) $$P(X=Y \mid X\leq Y) = \frac{P(X=Y \cap X\leq Y)}{P(X\leq Y)} = \frac{P(X=Y)}{P(X\leq Y)}$$

$$= \frac{P_{X,Y}(1,1) + P_{X,Y}(2,2) + P_{X,Y}(3,3)}{P_{X,Y}(1,1) + P_{X,Y}(1,2) + P_{X,Y}(1,3) + P_{X,Y}(2,2) + P_{X,Y}(2,3) + P_{X,Y}(3,3)}$$

$$= \frac{(3+5+7)/45}{(3+4+5+5+6+7)/45} = \frac{15}{30} = \underline{0.5}$$

(δ) $$P(X=2 \mid Y=1) = \frac{P(X=2, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{P_{X,Y}(2,1)}{P_Y(1)} = \frac{4/45}{12/45} = \frac{1}{3}.$$

(ε) $$P(Y \text{ ζυγός} \mid X \text{ περιττός}) = \frac{P_{X,Y}(1,2) + P_{X,Y}(3,2)}{P_X(1) + P_X(3)} = \frac{(4+6)/45}{(12+18)/45} = \frac{1}{3}$$

(στ) $$E[Z] = E[2X + Y^2] = 2E[X] + E[Y^2]$$

$$= 2\left(1\times\frac{4}{15} + 2\times\frac{1}{3} + 3\times\frac{2}{5}\right) + \left(1^2\times\frac{4}{15} + 2^2\times\frac{1}{3} + 3^2\times\frac{2}{5}\right)$$

$$= \underline{\underline{9.47}}$$

□