

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
18 Νοεμβρίου 2017 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Βασικές Έννοιες

Έστω A , B , και C τρία γεγονότα ορισμένα στο δειγματοχώρο Ω ενός πειράματος τύχης. Οι πιθανότητες τους είναι αντίστοιχα:

$$P(A) = 1/2, \quad P(B) = 1/4, \quad P(C) = 2/3.$$

Σας δίδεται ότι: (1) τα γεγονότα A και B είναι *ασυμβίβαστα* (ξένα) μεταξύ τους, (2) τα γεγονότα A και C είναι *ανεξάρτητα* μεταξύ τους και (3) $P(B|C) = 1/4$. Υπολογίστε:

(α) την πιθανότητα ότι συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα A , B , και C .

(β) την πιθανότητα ότι συμβαίνουν τουλάχιστον δύο από τα γεγονότα A , B , και C .

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Συνδυαστική

Ένα συρτάρι περιέχει 4 μαύρες, 6 κόκκινες και 8 κίτρινες κάλτσες. Διαλέγουμε τυχαία 2 κάλτσες από το συρτάρι.

(α) Με ποια πιθανότητα οι δύο κάλτσες που διαλέξαμε έχουν το ίδιο χρώμα;

(β) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα ότι οι δύο κάλτσες είναι κίτρινες δεδομένου ότι έχουν το ίδιο χρώμα;

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Διακριτές τ.μ.

Με τον καλό σας φίλο Κώστα περνάτε μία εβδομάδα διοικιμάζοντας την τύχη σας στο Las Vegas. Ο Κώστας σας εισηγείται την ακόλουθη "σίγουρη" συνταγή για να κερδίσετε στη ρουλέτα: "Πόνταρε πρώτα \$100 στο κόκκινο. Αν έρθει κόκκινο (συμβαίνει με πιθανότητα $18/38$), πάρε το κέρδος σου (\$100) και φύγε. Αν έρθει μαύρο και χάσεις (με πιθανότητα $20/38$), βάλε από \$200 στο κόκκινο στα επόμενα δύο γυρίσματα του τροχού και μετά φύγε."

(α) Ορίζουμε την τ.μ. X ως το συνολικό κέρδος σας. Προφανώς αρνητικές τιμές της X δηλώνουν χάσιμο. Δημιουργείστε το δενδρικό διάγραμμα για αυτό το πείραμα τύχης και περιγράψτε πλήρως την τ.μ. X (πεδίο τιμών και συνάρτηση πιθανότητας).

(β) Ποια η πιθανότητα να κερδίσετε, $P(X > 0)$;

(γ) Ποιο το αναμενόμενο κέρδος σας, $E[X]$; Είναι καλή η στρατηγική που σας προτείνει ο φίλος σας;

Θέμα 4 - 20 μονάδες. Δοκιμές Bernoulli: Best-of-Seven NBA Finals

Μετά από μία καταπληκτική σεζόν του Γιάννη Αντετοκούνμπο, οι Milwaukee Bucks παίζουν στους τελικούς του NBA απέναντι στους Warriors του Steph Curry. Η σειρά των τελικών κρίνεται στις 4 νίκες. Υποθέτουμε ότι οι αγώνες είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους, δεν υπάρχουν ισοπαλίες, και οι Bucks κερδίζουν κάθε αγώνα με πιθανότητα p . Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή G ως το συνολικό αριθμό των αγώνων που παίζονται σε αυτό το *best-of-seven NBA finals*.

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι οι Bucks κερδίζουν τους 2 από τους 4 πρώτους αγώνες.
- (β) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός των αγώνων που κερδίζουν οι Warriors στους 4 πρώτους αγώνες;
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα ο Γιάννης να "κλείσει" την σειρά στα 6 παιχνίδια, $P(\{G = 6\} \cap \{\text{οι Bucks κερδίζουν τους τελικούς}\})$. Αντίστοιχα, με τι πιθανότητα θα πάρει ο Curry το τρόπαιο στους 6 αγώνες;
- (δ) Υπολογίστε την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. G .

Θέμα 5 - 20 μονάδες. Από κοινού κατανομές

Οι τ.μ. X και Y παίρνουν τιμές x και y , αντίστοιχα, στο σύνολο $\{1, 2, 3\}$. Στον παρακάτω πίνακα μας δίδεται η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) $p_{X,Y}(x, y)$ των τ.μ. X και Y .

		Y			$p_X(x)$
		$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	
X	$x = 1$	$3c$	$4c$	$5c$	
	$x = 2$	$4c$	$5c$	$6c$	
	$x = 3$	$5c$	$6c$	$7c$	
$p_Y(y)$					

- (α) Υπολογίστε την σταθερά c .
- (β) Υπολογίστε τις περιθωριακές σ.π. $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y , αντίστοιχα.
- (γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X = Y \mid X \leq Y)$.
- (δ) Δεδομένου ότι $Y = 1$, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι $X = 2$;
- (ε) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y \text{ είναι ζυγός} \mid X \text{ είναι περιττός})$;
- (στ) Έστω $Z = 2X + Y^2$. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[Z]$, της τ.μ. Z .