

**Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών**

**HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2017-18**

**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

**Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων**

**Άσκηση 1.**

Εκτελούμε 50 (  $n$  ) ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας  $p = 0.05$ . Θεωρούμε, δηλαδή, επιτυχία το γεγονός ότι το άτομο διαθέτει το συγκεκριμένο γονίδιο. Για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή χρησιμοποιούμε το γνωστό τύπο της διωνυμικής,  $E[X] = n \cdot p = 50 \cdot 0.05 = 2.5$ . Επίσης, ζητάμε την πιθανότητα, το πλήθος των επιτυχιών να είναι το πολύ ίσο με 2, με τη χρήση της προσέγγισης "Poisson". Ισχύει  $\lambda = 50 \cdot (0.05) = 2.5$  και:

$$P \simeq \sum_{k=0}^2 \frac{e^{-2.5}(2.5)^k}{k!} = e^{-2.5}(1 + 2.5 + \frac{6.25}{2}) = 6.625 \cdot e^{-2.5}$$

**Άσκηση 2.** (α,i)  $P(X = 2) = \binom{10}{2}p^2(1-p)^8 = \frac{10!}{2!8!}p^2(1-p)^8 = 45p^2(1-p)^8$

(α,ii)  $var(3X + 2) = 3^2 var(X) = 9 * n * p * (1-p) = 9 * 10 * p * (1-p) = 90p(1-p)$

(β) Για την Poisson δείξαμε ότι  $E[Z] = var(Z) = \lambda = 3$ .

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[(Z - 2)^2] = E[Z^2 - 4Z + 4] = E[Z^2] - 4E[Z] + 4 \\ &= var(Z) + (E[Z])^2 - 4E[Z] + 4 \\ &= \lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 4 \\ &= 3^2 - 3 * 3 + 4 = 4 \end{aligned}$$

**Άσκηση 3.**

(α') Γνωρίζουμε ότι:

$$\sum_x p_X(x) = 1 \Leftrightarrow \sum_{x=-3}^3 \frac{1}{a} x^2 = 1 \Leftrightarrow a = \sum_{x=-3}^3 x^2 \Leftrightarrow a = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 \Leftrightarrow$$

$a = 28$ .

Επίσης, δεδομένου ότι η συνάρτηση πιθανότητας της  $X$  είναι συμμετρική γύρω από το 0, ισχύει ότι  $E[X] = 0$ .

**(β')**  $Z = (X - E[X])^2 = (X - 0)^2 = X^2$ . Οι τιμές που μπορεί να πάρει η τ.μ.  $Z$  είναι 0,1,4,9. Δεδομένου ότι υπολογίσαμε παραπάνω πως  $\alpha = 28$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \quad p_Z(0) &= \frac{0}{28} = 0 \\ \bullet \quad p_Z(1) &= \frac{1}{28} + \frac{1}{28} = \frac{1}{14} \\ \bullet \quad p_Z(4) &= \frac{4}{28} + \frac{4}{28} = \frac{2}{7} \\ \bullet \quad p_Z(9) &= \frac{9}{28} + \frac{9}{28} = \frac{9}{14} \end{aligned}$$

Τελικά, έχουμε:

$$P_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{14}, & z = 1 \\ \frac{2}{7}, & z = 4 \\ \frac{9}{14}, & z = 9 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

**(γ')** Έχουμε:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = E[Z] - 0^2 = \sum_z z * p_Z(z) = (1 * \frac{1}{14}) + (4 * \frac{2}{7}) + (9 * \frac{9}{14}) = 7$$

**(δ')**

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \sum_x (x - E[X])^2 * p_X(x) = \sum_x x^2 * p_X(x) = \\ &= (-3)^2 * \frac{9}{28} + (-2)^2 * \frac{4}{28} + (-1)^2 * \frac{1}{28} + (0)^2 * \frac{0}{28} + (1)^2 * \frac{1}{28} + (2)^2 * \frac{4}{28} + (3)^2 * \frac{9}{28} = \\ &= \frac{81}{28} + \frac{16}{28} + \frac{1}{28} + 0 + \frac{1}{28} + \frac{16}{28} + \frac{81}{28} = 7 \end{aligned}$$

**Άσκηση 4. (α)** Η PMF της  $D_i$  είναι:

$$p_{D_i}(d) = \begin{cases} 2/3, & \text{αν } d = 0 \text{ (πράσινο φανάρι)}, \\ 1/3, & \text{αν } d = 4 \text{ (κόκκινο φανάρι)}, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Αυστηρά μιλώντας, η τ.μ.  $D_i$  δεν μοντελοποιείται ως Bernoulli, γιατί οι πιθανές τιμές της  $D_i$  δεν είναι το 0 και το 1. Αντίθετα, η τ.μ.  $R_i$  ακολουθεί την Bernoulli κατανομή, όπως φαίνεται και από την PMF της παρακάτω:

$$p_{R_i}(r) = \begin{cases} 2/3, & \text{αν } r = 0 \text{ (πράσινο φανάρι - καθυστέρηση 0 δευτ.)}, \\ 1/3, & \text{αν } r = 1 \text{ (κόκκινο φανάρι - καθυστέρηση 4 δευτ.)}, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της  $D_i$  είναι:

$$E[D_i] = 0 * \frac{2}{3} + 4 * \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

και

$$var(D_i) = (0 - \frac{4}{3})^2 * \frac{2}{3} + (4 - \frac{4}{3})^2 * \frac{1}{3} = \frac{32}{27} + \frac{64}{27} = \frac{96}{27}$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της  $R_i$  είναι:

$$E[R_i] = p = \frac{1}{3},$$

και

$$var(R_i) = p(1 - p) = \frac{1}{3} * \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

**(β)** Ορίζουμε την τ.μ.  $X$  ως το χρόνο διάρκειας της διαδρομής, σε δευτερόλεπτα. Τότε:

$$X = 23 + 4 \sum_{i=1}^5 R_i,$$

όπου η τ.μ.  $Y = \sum_{i=1}^5 R_i$  είναι προφανώς διωνυμική με παραμέτρους  $n = 5$  και  $p = 1/3$ :  $Y \sim \Delta(5, 1/3)$ . Συνεπώς, η τ.μ.  $X$  παίρνει τις τιμές  $\{23, 27, 31, 35, 39, 43\}$  όταν η τ.μ.  $Y$  παίρνει τις τιμές  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  με τις αντίστοιχες διωνυμικές πιθανότητες. Η PMF της  $X$  είναι:

$$p_X(k) = \begin{cases} \binom{5}{(k-23)/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{(k-23)/4} \left(\frac{2}{3}\right)^{(43-k)/4}, & \text{αν } k \in \{23, 27, 31, 35, 39, 43\}, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της  $X$  είναι:

$$E[X] = E[23 + 4 \sum_{i=1}^5 R_i] = 23 + 4 * 5 * E[R_i] = 23 + 20 * \frac{1}{3} = \frac{89}{3},$$

και

$$var(X) = var(23 + 4 \sum_{i=1}^5 R_i) = var(4 \sum_{i=1}^5 R_i) = (\text{επειδή οι } R_i \text{ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους}) \quad 16 * 5 * \frac{2}{9} = \frac{160}{9}.$$

**(γ)** Προφανώς, η τ.μ.  $N$  είναι διωνυμική με παραμέτρους  $n = 5$  και  $p = 1/3$ :  $N \sim \Delta(5, 1/3)$ . Επομένως  $P(N = 0) = (\frac{2}{3})^5$  και  $P(N = 1) = \binom{5}{1}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^1$ . Δεδομένου ότι  $X \leq 27$ , τότε  $N = 0$  ή  $N = 1$ . Επομένως, πρέπει να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη ΣΠ,  $p_{N/X \leq 27}(k)$ , για  $k = 0$  και  $k = 1$ . Έχουμε:

$$p_{N/X \leq 27}(k) = \frac{P(N = k \cap X \leq 27)}{P(X \leq 27)}.$$

Από το υποερώτημα (β) έχουμε ότι

$$P(X \leq 27) = p_X(23) + p_X(27) = (\frac{2}{3})^5 + \binom{5}{1}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^1.$$

Επίσης,

$$P(N = 0 \cap X \leq 27) = P(N = 0) = (\frac{2}{3})^5$$

και

$$P(N = 1 \cap X \leq 27) = P(N = 1) = \binom{5}{1}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^1.$$

Έτσι τελικά:

$$P_{N|X \leq 27}(k|X \leq 27) = \begin{cases} \frac{(\frac{2}{3})^5}{(\frac{2}{3})^5 + \binom{5}{1}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^1} & \text{αν } k = 0, \\ \frac{\binom{5}{1}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^1}{(\frac{2}{3})^5 + \binom{5}{1}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^1} & \text{αν } k = 1, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} = \begin{cases} 2/7 & \text{αν } k = 0, \\ 5/7 & \text{αν } k = 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Συνεπώς

$$E[N|X \leq 27] = \frac{5}{7}.$$

**(δ)** Δεδομένου ότι το τελευταίο κόκκινο φανάρι που συναντήσατε ήταν το τέταρτο,  $R_4 = 1$  και  $R_5 = 0$ . Πρέπει να υπολογίσουμε την  $var(N|\{R_4 = 1\} \cap \{R_5 = 0\})$ . Συνεπώς:

$$\begin{aligned} var(N|\{R_4 = 1\} \cap \{R_5 = 0\}) &= var(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5|\{R_4 = 1\} \cap \{R_5 = 0\}) \\ &= var(R_1 + R_2 + R_3 + 1 + 0|\{R_4 = 1\} \cap \{R_5 = 0\}) \\ &= var(R_1 + R_2 + R_3 + 1) \\ &= var(R_1) + var(R_2) + var(R_3) \quad (\text{επειδή οι } R_i \text{ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους}) \\ &= 3var(R_1) \\ &= \frac{6}{9}. \end{aligned}$$

(1)

**(ε)** Έστω  $A$  το ενδεχόμενο να μη συλληφθείτε λόγω παράβασης σηματοδότη. Ισχύει ότι  $P(A) = (\frac{2}{3})^5$ .

Αυτό σημαίνει πως η πιθανότητα να συλληφθείτε είναι ίση με  $1 - P(A) = 1 - (\frac{2}{3})^5 \approx 0.868$ .

**Άσκηση 5.**

(α) Προσθέτουμε όλες τις τιμές του πίνακα και θέτουμε το άθροισμα ίσο με 1.

$$20c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{20}.$$

(β)  $P(Y < X) = c + 6c + 4c = 11c = 11/20$ .

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| $y = 3$ | $c$     | $c$     | $2c$    |
| $y = 2$ | $2c$    | $0$     | $4c$    |
| $y = 1$ | $3c$    | $c$     | $6c$    |
|         | $x = 1$ | $x = 2$ | $x = 3$ |

(γ)  $P(Y = X) = 3c + 0 + 2c = 5c = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

(δ)  $P(Y = 3) = c + c + 2c = 4c = 1/5$ .

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| $y = 3$ | $c$     | $c$     | $2c$    |
| $y = 2$ | $2c$    | $0$     | $4c$    |
| $y = 1$ | $3c$    | $c$     | $6c$    |
|         | $x = 1$ | $x = 2$ | $x = 3$ |

(ε)

$$p_X(x) = \begin{cases} 3/10, & x = 1 \\ 1/10, & x = 2 \\ 3/5, & x = 3 \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & y = 1 \\ 3/10, & y = 2 \\ 1/5, & y = 3 \end{cases}$$

(στ)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{1}{10} \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 3 = 2.3 \\ \mathbf{E}[Y] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 1.7 \end{aligned}$$

(ζ)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2] &= \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{1}{10} \cdot 4 + \frac{3}{5} \cdot 9 = 6.1 \\ \mathbf{E}[Y^2] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot 9 = 3.5 \\ \text{var}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = 6.1 - 2.3^2 = 0.81 \\ \text{var}(Y) &= \mathbf{E}[Y^2] - (\mathbf{E}[Y])^2 = 3.5 - 1.7^2 = 0.61 \end{aligned}$$

(η) Το πεδίο τιμών της Z είναι {1,2,3,4,8,9,12,18,27} και η συνάρτηση πιθανότητάς της είναι:

|          |      |      |      |      |   |      |      |      |      |
|----------|------|------|------|------|---|------|------|------|------|
| $z$      | 1    | 2    | 3    | 4    | 8 | 9    | 12   | 18   | 27   |
| $p_Z(z)$ | 3/20 | 1/20 | 6/20 | 2/20 | 0 | 1/20 | 4/20 | 1/20 | 2/20 |

$$(9) \quad p_{X|Y}(x|y=2) = \frac{P_{X,Y}(x,2)}{P_Y(2)} = \begin{cases} 2c/6c = 1/3 & x=1, \\ 4c/6c = 2/3 & x=3, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

$$E[Z|Y=2] = E[Y^2X|Y=2] = E[4X|Y=2] = 4E[X|Y=2] = 4 \sum_{x=1}^3 x p_{X|Y}(x|y=2) = 4(1 \cdot 1/3 + 3 \cdot 2/3) = 28/3.$$

### Άσκηση 6.

(α) Η  $X$  παίρνει τις τιμές -6, 6, 12, 18.

(β) Αν στοιχηματίσεις 6 Ευρώ στο  $i$ , τότε χάνεις αν και τα τρία ζάρια δείξουν ένα από τους 5 διαφορετικούς από το  $i$  αριθμούς. Έτσι  $P(X = -6) = 5^3/6^3 = \frac{125}{216}$ . Αντίθετα, κερδίζεις 6 Ευρώ αν ένα από τα ζάρια έρθει  $i$  και τα άλλα 2 όχι  $P(X = 6) = 3 \cdot (1 \cdot 5^2)/6^3 = \frac{75}{216}$ . Ομοίως,  $P(X = 12) = 3 \cdot (1^2 \cdot 5)/6^3 = \frac{15}{216}$  και  $P(X = 18) = 1^3/6^3 = \frac{1}{216}$ . Έλεγχος ορθότητας:  $125 + 75 + 15 + 1 = 216$

$$(γ) \quad E[X] = \sum x \cdot p(x) = \frac{125 \cdot (-6) + 75 \cdot (6) + 15 \cdot 12 + 1 \cdot 18}{216} = -\frac{102}{216} = -\frac{17}{36}$$

(δ) Η πιθανότητα τα 3 ζάρια να δείξουν διαφορετικούς αριθμούς είναι  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{216} = \frac{5}{9}$ . Σε αυτήν την περίπτωση κερδίζεις 3 Ευρώ από τους αριθμούς που ήρθαν και χάνεις άλλα τόσα από τους υπόλοιπους. Άρα, είσαι στο μηδέν. Η πιθανότητα και τα 3 ζάρια να δείξουν τον ίδιο αριθμό είναι  $6 \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{36}$ , στην περίπτωση αυτή κερδίζεις 3 Ευρώ από τον αριθμό που ήρθε και χάνεις άλλα 5 από τους υπόλοιπους αριθμούς. Άρα, σε αυτήν την περίπτωση χάνεις 2 Ευρώ. Η πιθανότητα 2 αριθμοί να είναι ίδιοι είναι  $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ , στην περίπτωση αυτή κερδίζεις 2 Ευρώ από το ζευγάρι και 1 από το μοναδικό, αλλά χάνεις 4 Ευρώ από τα υπόλοιπα που δεν ήρθαν. Άρα, συνολικά, χάνεις 1 Ευρώ. Έτσι, η  $Y$  είναι μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει τις τιμές 0, -1, -2 με πιθανότητες που βρέθηκαν παραπάνω. Η αναμενόμενη τιμή της είναι:  $E[Y] = \frac{0 \cdot 20 - 1 \cdot 15 - 2 \cdot 1}{36} = -\frac{17}{36}$ . Άρα, παρέμεινε η ίδια απώλεια.

### Άσκηση 7.

(α) Έστω  $X$  το πλήθος των εύστοχων βολών του Bran. Έχουμε διωνυμική κατανομή με  $n = 20$  και  $p = 0.95$  (πιθανότητα να πετύχει το στόχο σε οποιοδήποτε σημείο). Πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα  $P(X \geq 15) = P(X = 15) + P(X = 16) + P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) = \binom{20}{15} \cdot 0.95^{15} \cdot 0.05^5 + \binom{20}{16} \cdot 0.95^{16} \cdot 0.05^4 + \binom{20}{17} \cdot 0.95^{17} \cdot 0.05^3 + \binom{20}{18} \cdot 0.95^{18} \cdot 0.05^2 + (20 \cdot 0.95^{19} \cdot 0.05) + 0.95^{20}$ . Ακόμη,  $E[X] = n \cdot p = 20 \cdot 0.95 = 19$ .

(β) Η πιθανότητα ο Bran να περάσει τα προκριματικά είναι  $0.95^{30}$ . Άρα, η πιθανότητα να μην περάσει είναι  $1 - 0.95^{30}$ . Αντίστοιχα, η πιθανότητα να αποκλειστεί στην 17<sup>η</sup> ρίψη ισούται με την πιθανότητα να έχουμε 1<sup>η</sup> εμφάνιση 'αστοχίας' (Γεωμετρική Κατανομή) στην 17<sup>η</sup> ρίψη, δηλαδή  $0.95^{16} \cdot 0.05$ .

- (γ) Κάθε ρίψη αποτελεί ανεξάρτητη δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας (πετυχαίνω το κέντρο)  $p = 0.5$  και πιθανότητα αποτυχίας (πετυχαίνω το στόχο εκτός κέντρου ή δεν τον πετυχαίνω καθόλου)  $p = 0.5$ . Έστω τυχαία μεταβλήτη  $Y$ , το πλήθος των προσπαθειών του Bran έως και την 1<sup>η</sup> αποτυχία. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα  $P(Y = 107) = 0.5^{106} * 0.5 = 0.5^{107}$ . Αντίστοιχα, ο μέσος αριθμός βολών και η διασπορά μπορούν να υπολογιστούν εύκολα, από τους γνωστούς τύπους της Γεωμετρικής. Έχουμε,  $E[Y] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.5} = 2$  και  $var(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0.5}{0.25} = 2$ .